LØSNING, MIDTSEMESTEREKSAMEN MA0002, VÅR 2009

Oppgave 1 a) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1,$$

hvor $y(0) = 2$.

Løsning: Dette er en lineær førsteordens diffligning med $P(x) = 1$ og $Q(x) = x + 1$. Integrerende faktor blir e^x, siden x er en antiderivert til 1. Dette gir

$$e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = xe^x + e^x,$$

som integrert mht x blir

$$e^x y = xe^x + C,$$

som løst for y blir

$$y = x + Ce^{-x}.$$

Settes initialverdibetingelsene inn får vi:

$$2 = y(0) = 0 + C \cdot 1 = C,$$

så løsningen blir

$$y(x) = x + 2e^{-x}.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4y} = \frac{x^2}{y},$$

hvor $y(0) = 2$.

Løsning: Dette er en separabel diffligning, skrevet om blir den:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot (x^2 + 1),$$

som gir følgende likhet når venstre side integreres mhp y og høyre side integreres mhp x:

$$y\ dy = (x^2 + 1)\ dx$$

Integrasjon gir at

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + x + C_1,$$

som løst for y gir

$$y = \pm\sqrt{\frac{2x^3}{3} + 2x + C}.$$

Initialbetingelser satt inn gir

$$2 = y(0) = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 2 \cdot 0 + C} = \sqrt{C},$$

som tilsier løsning

$$y(x) = \sqrt{\frac{2x^3}{3} + 2x + 4}.$$

Oppgave 2 Finn likevektspunktene til differensiallikningen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 21,$$

og avgjør om de er stabile eller ustabile.

Løsning: Vi leter etter situasjoner hvor $\frac{dy}{dx} = 0$, og finner da disse ved å løse $y^2 + 4y - 21 = 0$, på et eller annet vis. Dette gir nullpunkt for $y = -7$ og $y = 3$. Vi kan undersøke stabiliteten til disse punktene ved å tegne opp grafen til $\frac{dy}{dx}$ og y og studere denne, eller derivere $y^2 + 4y - 21$ med hensyn til y, og finne den deriverte til $\frac{dy}{dx}$ for hhv -7 og 3. Resultatet blir at -7 er stabilt og 3 er ustabilt.

Oppgave 3 Sett det følgende systemet av lineære ligninger opp på *standardform* og benytt Gauss-eliminasjon til å løse systemet du da får:

$$\begin{aligned} 2x + 6y + 2z &= -2 \\ 3y + 3 &= -z \\ 2z + x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

Løsning: Standardform blir som nedenunder, og vi begynner med Gausseliminasjonen med en gang:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & | & -2 \\ 0 & 3 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} -2\cdot \text{ bunn adderes til topp (denne er på standardform}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & | & -4 \\ 0 & 3 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} \text{ganger topp med } -\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} -1\cdot \text{ topp adderes midten, } -2\cdot \text{ topp adderes bunn}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & 0 & | & -5 \\ 1 & 3 & 0 & | & -3 \end{bmatrix} -1\cdot \text{ midten adderes bunnen}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & 0 & | & -5 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \text{ganger midten med } \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-5}{3} \\ 1 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 4 Vi ser på matrisen $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Finn determinanten til A.

Løsning: I følge reglene for regning med determinanter har vi at

$$\begin{vmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Dette gir at

$$\det A = -\Big(3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\Big) = -\big(3 \cdot -4 + 2 \cdot 0\big) = 12$$

b) Finn A^{-1}.

Løsning: Vi regner:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -1\cdot \text{ midten adderes bunn, } -2\cdot \text{ midten adderes topp}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & | & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{gang bunn med 2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & | & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} -1\cdot \text{ topp adderes bunn}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{gang midten med 2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & | & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} -1\cdot \text{ bunn adderes midten}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & | & 1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & | & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & | & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{bytt rader, og del på riktige tall}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Oppgave 5 Vi ser på matrisen $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Finn egenverdiene til A.

Løsning: Egenverdiene er løsningene til ligningen

$$0 = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 6 \\ 6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)(5-\lambda) - 6\cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 56,$$

som er $\lambda_1 = -7$ og $\lambda_2 = 8$.

b) Finn tilhørende egenvektorer til de to egenverdiene A.

Løsning:$\lambda_1 = -7$:

$$(A - (-7)I)\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \underline{v}_1 = \underline{0}$$

som indikerer at $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 2//-1 \end{bmatrix}$ er en mulig egenvektor.
$\lambda_2 = 8$:

$$(A-(8)I)\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \underline{v}_2 = \underline{0}$$

som indikerer at $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1//2 \end{bmatrix}$ er en mulig egenvektor.

Oppgave 6 Vi ser på vektoren $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ i rommet.

a) Finn en ligning for planet som er ortogonalt med $\underline{x}$ og samtidig går gjennom punktet $(1,1,1)$.

Løsning: Planet er gitt ved følgende ligning ($\cdot$ betyr skalarprodukt):

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix} = 3x-4y+3z-2 = 0,$$

og altså $3x-4y+3z-2=0$ angir det ønskede planet.

b) Det finnes også en linje som er parallell med $\underline{x}$ gjennom punktet $(1,1,1)$. Finn en ligning, eller et system av ligninger, for denne linjen.

Løsning: En mulig måte å angi denne linjen på er

$$t\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

som tegner ut linjen når $t \in \mathbb{R}$.