MA0002 Brukerkurs i Matematikk B
Vår 2023

Løsningsforslag — Øving 9

$\boxed{1}$ La

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

være Leslie-matrisen for en populasjon med to aldersgrupper.

a) Finn begge egenverdiene.
For å finne egenverdiene løser vi polinomet.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(L - \lambda I) = (1-\lambda)(-\lambda) - 3 \cdot 0.7 \\ 0 &= \lambda^2 - \lambda - 2.1 \end{aligned}$$

Ved å løse dette andregradsuttrykket, får vi de to løsningene $\lambda_1 \approx 2.03$ og $\lambda_2 \approx -1.03$, som er de to egenverdiene.

b) Gi en biologisk beskrivelse av den større egenverdien.
Den større egenverdien λ_1, beskriver vekstraten til populasjonen.

c) Finn den stabile aldersfordelingen.
For å finne den stabile vekstraten, trenger vi å finne egenvektoren til λ_1, dette gjør vi ved finne den koresponderende vektoren som tilfredsstiller

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

som er det samme som å løse det linæret systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= \lambda_1 x_1 \\ 0.7x_1 &= \lambda_1 x_2 \end{aligned}$$

som forengkles til

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{(1-\lambda_1)} x_2 &= 0 \\ x_1 - \frac{\lambda_1}{0.7} x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Som blir

$$\begin{aligned} x_1 - 2.9x_2 &= 0 \\ x_1 - 2.9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dermed vil

$$\begin{aligned} x_1 &= 2.9x_2 \\ 10x_1 &= 29x_2 \end{aligned}$$

Altså vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 29 \end{bmatrix}$$

vil være en stabil aldersfordeling.

$\boxed{2}$ La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Finn $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 - 0 \\ 3 - (-2) \\ 1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

b) Finn $2\mathbf{x} + 3\mathbf{y}$.

$$2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

c) Finn $-\mathbf{x} - 2\mathbf{y}$.

$$-\mathbf{x} - 2\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$$

d) Finn lengden til $\mathbf{x}$.

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5.1$$

$\boxed{3}$ La $A = (-1, 0)$ og $B = (2, -4)$. Finn vektorrepresentasjonen til $B - A$ (samme som $\overrightarrow{AB}$). Deretter skiser vektorene A, B og $B - A$.

$$B - A = \begin{bmatrix} 2 - (-1) \\ -4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Tegning av vektorene kan man se i Figure 1

$\boxed{4}$ Finn prikproduktet (skalarproduktet) til $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = 1.$$

$\boxed{5}$ La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Finn en $\mathbf{y}$ slik at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ortogonale.

Man kan velge hvilklen som helst vektor $\mathbf{y}$ slik at prikproduktet mellom $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ blir null. For eksempel kan man velge

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{6}$ En trekant har hjørner i punktene $P = (0,0), Q = (0,3)$ og $R = (5,0)$.

a) Finn lengden til alle sidene.

$$\begin{aligned} ||P - Q|| &= \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ ||Q - R|| &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34} \\ ||R - P|| &= \sqrt{5^2 + 0^2} = 5 \end{aligned}$$

b) Bruk prikkproduktet til å finne vinklene i alle hjørnene til trekanten.

$$\begin{aligned} (Q - P) \cdot (Q - R) &= 9 \\ (P - Q) \cdot (P - R) &= 0 \\ (R - P) \cdot (R - Q) &= 25 \end{aligned}$$

Dermed får vi om vi setter vinklene mellom QP og QR, mellom PQ og PR og mellom RP og RQ som θ_1, θ_2 og θ_3 får vi at

$$\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \frac{(Q - P) \cdot (Q - R)}{||P - Q|| \cdot ||Q - R||} \approx 0.514 \\ \cos\theta_2 &= \frac{(P - Q) \cdot (P - R)}{||P - Q|| \cdot ||R - P||} = 0 \\ \cos\theta_3 &= \frac{(R - P) \cdot (R - Q)}{||Q - R|| \cdot ||R - P||} \approx 0.857 \end{aligned}$$

Som vil si at $\theta_1 \approx 59^o$, $\theta_2 = 0^o$ og $\theta_3 \approx 31^o$.

$\boxed{7}$ Finn representasjon av linja som går igjennom ponktene $(2, 1)$ og $(1, 0)$.

Vi finner representasjonen på formen $y = ax + b$.

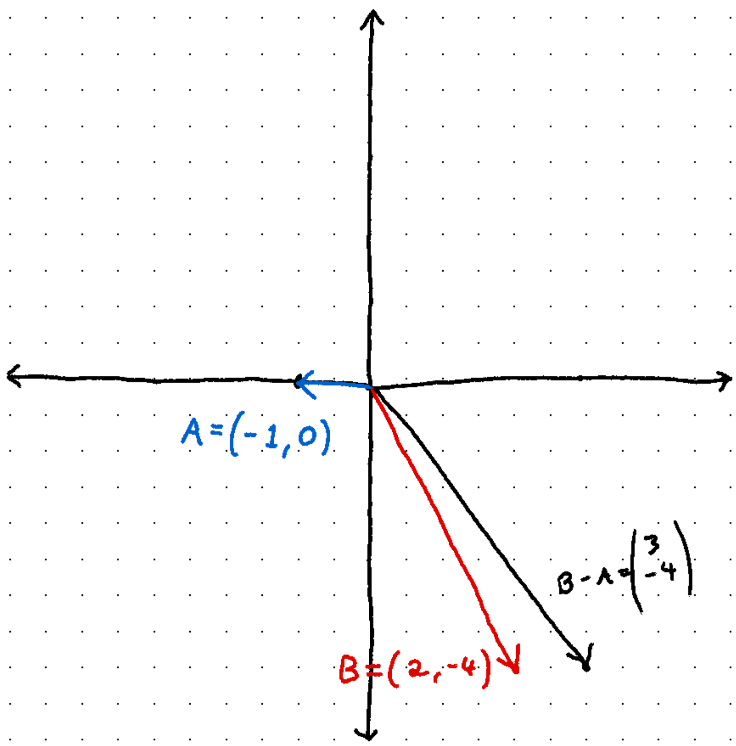
$$a = \frac{1 - 0}{2 - 1} = 1$$

Så vi har at $y = x + b$. For å finne b setter vi inn punktet $(1, 0)$

$$0 = 1 + b$$

Altsa $b = -1$ og vi har representasjonen

$$y = x - 1.$$



Figur 1: Tegning av A, B og $B - A$