MA0002 Brukerkurs i Matematikk B
Vår 2023

Løsningsforslag — Øving 5

$\boxed{1}$ a) Løs det lineæret systemet under, deretter skiser grafene for å bekrefte løsningen din.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ x - 4y &= -4 \end{aligned}$$

Vi starter med å se at

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 6 &\iff y = 2 - \frac{2}{3}x \\ x - 4y = -4 &\iff y = 1 + \frac{x}{4} \end{aligned}$$

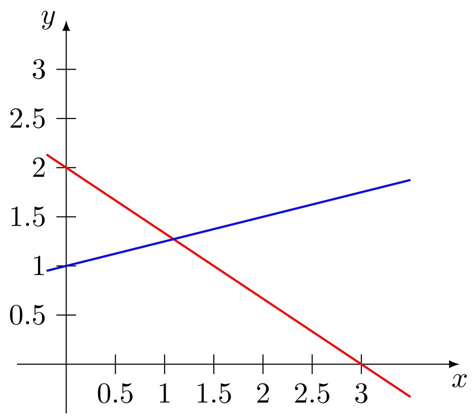
Deretter kan vi løse ved å sette in for y i begge uttrykkene

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{3}x &= 1 + \frac{x}{4} \\ \frac{11}{12}x &= 1 \\ x &= \frac{12}{11} \end{aligned}$$

Deretter kan vi sette in for x i en av likningene og får

$$y = \frac{14}{11} \text{ og } x = \frac{12}{11}.$$

Vi skiserer deretter grafene som du kan se i Figur 1.



Figur 1: Grafen til systemet i oppgave 1 a

b) Nå se på det linære systemet

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 6 \\ ax - 4y &= -4 \end{aligned}$$

Løs systemet så du får en løsning med hensyn på a. For hvilke værdier av a har systemet: nøyaktig én løsning, uendelig mange løsninger, ingen løsninger?

Vi starter på samme måte som i sist oppgave, ved å se at

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 6 &\iff y = 2 - \frac{2}{3}x \\ ax - 4y = -4 &\iff y = 1 + a\frac{x}{4} \end{aligned}$$

Vi setter deretter inn for y og får

$$\begin{aligned} 2 - \frac{2}{3}x &= 1 + a\frac{x}{4} \\ \frac{3a+8}{12}x &= 1 \\ x &= \frac{12}{3a+8} \end{aligned}$$

Deretter seetter vi inn for y i en av likningene og får at

$$y = 2 - \frac{8}{3a+8} \text{ og } x = \frac{12}{3a+8}.$$

Vi kan se at dette er en gyldig løsning for alle $a \neq -\frac{8}{3}$. Så la oss prøve å sette inn $a = -\frac{8}{3}$ i den orginale likningen og se hva vi får. Da får vi at

$$\begin{aligned} y &= 2 - \frac{2}{3}x \\ y &= 1 - \frac{2}{3}x \end{aligned}$$

Vi kan se at dette systemet ikke har noen løsning ettersom dette vil være to parralelle linjer som ikke skjærer hverandre. Så da har vi sett at når $a = -\frac{8}{3}$ vil systemet ha null løsninger og ved alle andre værdier for a vil det ha nøyaktig én løsning, og det vil dermed aldri ha uendelig mange løsninger.

c) Gitt funksjonene

$$f_1(x, y) = 3(x - 2y) \text{ go } f_2(x, y) = -x,$$

vi definerer vektorene

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Finn en matrise A, slik at

$$\mathbf{f} = A \cdot \mathbf{u}.$$

Her kan vi se om vi setter matrisen til å være

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

så vil dette stemme.

$\boxed{2}$ Finn alle løsninger (om det er noen) til systemene

a)

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Først ser vi at

$$\begin{aligned} 3x + y = 5 &\iff y = 5 - 3x \\ x - y = 1 &\iff y = x - 1 \end{aligned}$$

Deretter setter vi inn for y og får

$$\begin{aligned} 5 - 3x &= x - 1 \\ 4x &= 6 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Så setter vi inn for x og får

$$y = \frac{1}{3} \text{ og } x = \frac{3}{2}.$$

b)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ -6x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

Først ser vi at

$$\begin{aligned} 2x - y = 1 &\iff y = 2x - 1 \\ -6x + 3y = 1 &\iff y = 2x - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Her kan vi se at vi har to paralelle linjer som ikke skjærer hverandre, og systemet har dermed ingen løsninger.

c)

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= -2 \\ -x - y &= 1 \end{aligned}$$

Først ser vi at

$$\begin{aligned} 2x + 2y = -2 &\iff y = -x - 1 \\ -x - y = 1 &\iff y = -x - 1 \end{aligned}$$

Her kan vi se at dette er to paralelle linjer som ligger oppå hverandre så dette systemet har dermed uendelig mange løsninger. Hvor alle løsningene er på formen $x = a$ og $y = -a - 1$ for alle reelle tall a.

3 Finn totalmatrisen og bruk denne til å løse det lineære likningssystemet.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 4 \\ 4x + y - 2z &= -12 \\ 2x - 3y + z &= 7 \end{aligned}$$

Vi setter opp

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -12 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Deretter startervi med radreduksjonen

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -2 & -12 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -12 \\ 2 & -3 & 1 & 7 \end{array}\right] \begin{matrix} -4 \quad -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 13 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \end{array}\right] \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ 3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 13 & 39 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \cdot\left(\frac{1}{13}\right) \end{matrix} \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -5 \quad 5 \end{matrix} \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Da har vi til slutt at løsningen på det leneæret systemet er

$$x = -1, \; y = -2, \; z = 3.$$

4 Det er tre ulike insektsarter i et labbur. De blir gitt to typer av mat. Om dagen vil hvert innsekt av artstype 1 konsumerer 3 enheter av mat A og 5 enheter av mat B, hvert innsekt av artstype 2 konsumerer 2 enheter av mat A og 3 enheter av mat B og hvert insekt av artstype 3 konsumerer 1 enhet av mat A og 2 enheter av mat B. Hver dag får laben levert 500 enheter av mat A og 900 enheter av mat B. Hvor mange insekter av hver art er det mulig for laben å ha? Er det mer enn en løsning?

Vi lar førs x være antall innsekter av art 1, y antall insekter av art 2 og z antall insekter av art 3. Da kan vi gi uttrykk for for hvor mye mat som blir spist av typ A og B i form av et lineært system med to likninger.

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 500 \\ 5x + 3y + 2z &= 900 \end{aligned}$$

Vi setter opp totalmatrisen for systemet for og så løse det ved å radredusere.

$$
\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 500 \\ 5 & 3 & 2 & 900 \end{array}\right] \; -2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 500 \\ -1 & -1 & 0 & -100 \end{array}\right] \cdot(-1) \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 500 \\ 1 & 1 & 0 & 100 \end{array}\right] \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 100 \\ 3 & 2 & 1 & 500 \end{array}\right] \; -3 \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & -1 & 1 & 200 \end{array}\right] \cdot(-1) \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -1 & -200 \end{array}\right] \; -1 \\
\sim &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & -200 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Fra dette får vi uttrykkene

$$
\begin{aligned}
x + z &= 300 \\
y - z &= -200
\end{aligned}
$$

som vi kan gjøre om til formen

$$
\begin{aligned}
z + x &= 300 \\
z &= y + 200
\end{aligned}
$$

Fra dette kan vi se at det skal vær til sammen 300 stykk av art 1 og art 2, og det skal være 200 fler av art 3 enn art 2. Dermed ser vi at alle possitive heltallsløsninger som tilfredsstiller disse to kravene vil være gyldige løsninger. For eksempel 50 stykk av art 1, 50 stykk av art 2 og 250 stykk av art 3.