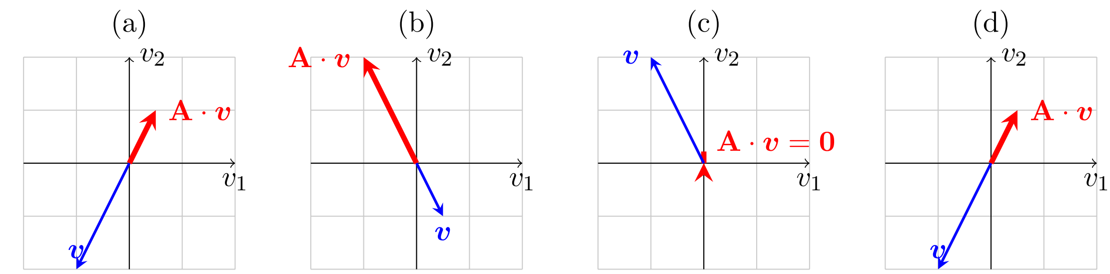
Oppgave 1 For deloppgavene 1., 2., 3., 4., avgjør hvilke utsagn som er riktige og hvilke som ikke er det.

Tips: (a) Det er alltid minst ett utsagn som er riktig og minst ett som er feil. (b) Avbildningene ble gjort sånn at feil utsagn er klart gjenkjennelige; Dvs. små grafiske unøyaktigheter teller <u>ikke</u> som ≪feil≫.

1. Her ser vi på lineære avbildninger $\boldsymbol{v} \mapsto \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v}$ for en 2×2- matrise $\mathbf{A}$ og vektorer $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^\top \in \mathbb{R}^2$.



(a) $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$. Tilhørende egenverdi er omtrent 0.5.

(b) $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$. Tilhørende egenverdi er omtrent -2.

(c) $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$. Tilhørende egenverdi er null.

(d) $\boldsymbol{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$. Tilhørende egenverdi er omtrent to.

2. La $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ og $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ for $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ en egenvektor for $\mathbf{A}$ til egenverdien λ.

   (a) $\boldsymbol{v}$ kan ikke være nullvektoren $\mathbf{0}$.
   (b) Det gjelder nødvendigvis at $\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = 0$.
   (c) Det gjelder nødvendigvis at $\det(\lambda \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) = 0$.
   (d) Når $\mathbf{A}$ multipliseres med λ er resultatet det samme som når $\mathbf{A}$ multipliseres med $\boldsymbol{v}$.
   (e) Det er ikke mulig å multiplisere $\mathbf{A}$ med λ i det hele tatt.
   (f) Det gjelder nødvendigvis at $\det(\mathbf{A}) = 0$.
   (g) Det gjelder nødvendigvis at $\det(\mathbf{A}) = \lambda$.

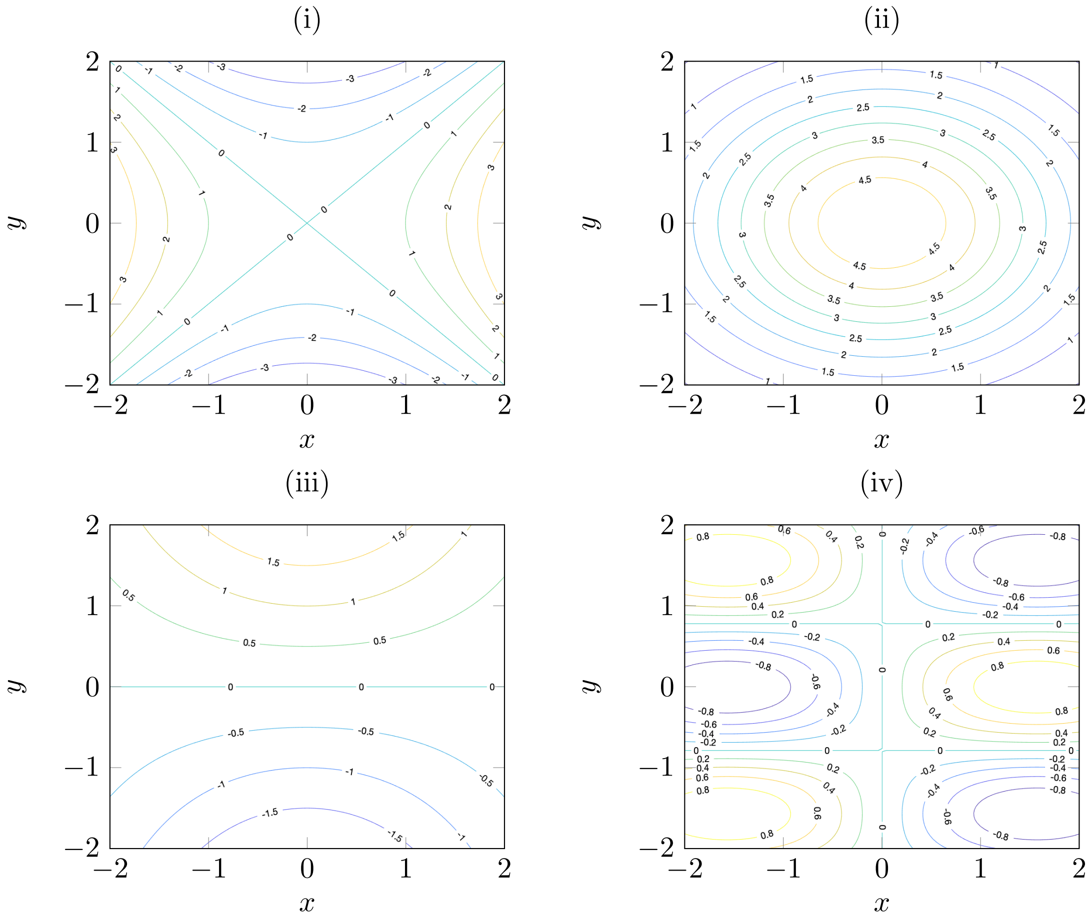
(h) Det lineære systemet $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ kan løses med hensyn på $\boldsymbol{x}$.

(i) Det lineære systemet $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$ kan løses med hensyn på $\boldsymbol{x}$.

(j) Det lineære systemet $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}$ kan løses med hensyn på $\boldsymbol{x}$ og det finnes nødvendigvis nøyaktig én løsning.

(k) Tallet λ er en egenverdi for $\mathbf{A}^\top$.

3. Nedenfor er det illustrasjoner (nivåkurver) og algebraiske uttrykk av funksjoner avhengig av to reelle variabler x og y. Oppgaven er å tilordne avbildningene til formlene.



$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3}}\,, \qquad g(x,y) = y \cdot \mathrm{e}(-\tfrac{x^2}{4})\,,$$
$$h(x,y) = x^2 - y^2\,, \qquad k(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(2 \cdot y)\,.$$

(a) Tilordningene er (i) $\leftrightarrow f$, (ii) $\leftrightarrow g$, (iii) $\leftrightarrow h$, (iv) $\leftrightarrow k$.

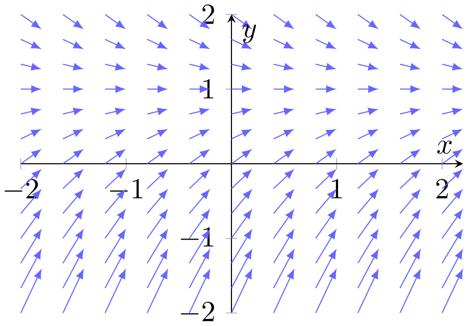
(b) Tilordningene er (i) $\leftrightarrow g$, (ii) $\leftrightarrow h$, (iii) $\leftrightarrow f$, (iv) $\leftrightarrow k$.

(c) Tilordningene er (i) $\leftrightarrow k$, (ii) $\leftrightarrow h$, (iii) $\leftrightarrow g$, (iv) $\leftrightarrow f$.

(d) Tilordningene er (i) $\leftrightarrow h$, (ii) $\leftrightarrow f$, (iii) $\leftrightarrow g$, (iv) $\leftrightarrow k$.

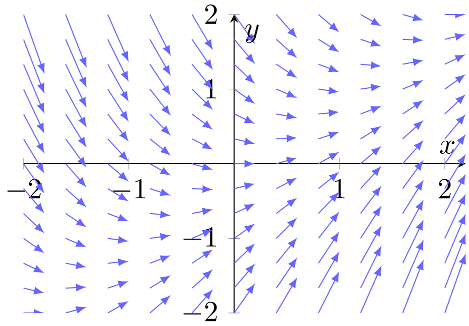
4. Nedenfor er det retningsfelt av skalare differensialligninger $y'(x) = f(x, y(x))$.

(a)



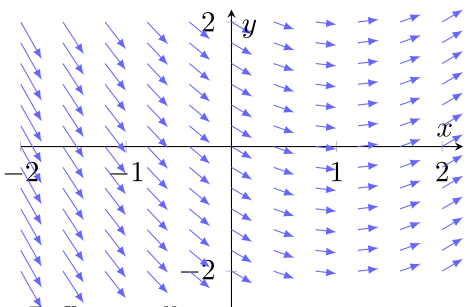
Her har vi $f(x, y) = 1 - y$.

(b)



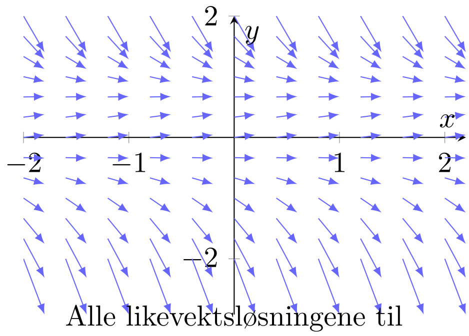
Her har vi $f(x, y) = x - y$.

(c)



Differensialligninga er autonom.

(d)



Alle likevektsløsningene til differensialligninga er stabile.

Løsningsforslag

1. (b) og (c) er riktige. For (a) og (c) er egenverdien rundt minus to.
2. (a), (b), (h), (i) og (k) er riktige. I (c) ble $\mathbf{A}$ og $\mathbf{I}$ byttet, (d) er feil, fordi $\lambda \cdot \mathbf{A}$ er matrise når $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v}$ er en vektor; (e): matrise-skalar-produkt er velforklart, (f) dette gjelder bare hvis $\lambda = 0$; (g) se på $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ og $\lambda = 1$ som moteksempel; (j) se på tilfelle $\lambda = 0$ som moteksempel.
3. (d) er riktig.
4. (a) og (b) er riktige. For (c): Se på horisontale linjer i koordinatesystemet. Hadde differensilaligningen vært autonom, ville alle pilene vist i samme retning langs sånn en linje. For (d): Likevekten ved $y \approx -0.5$ er ikke stabil; pilene viser «ned».

△

Oppgave 2 En hamster-populasjon, der vi kun betrakter hunkjønn, kan deles opp i to aldersgrupper: Under-ett-årige har en en-til-seks sjanse for å overleve det første året og i gjennomsnitt får de to avkom. Det andre kullet er over-ett-årige. Ingen hamstere blir eldre enn to år.

(a) Sett opp en Leslie-matrise $\mathbf{L}$ som representerer opplysningene gitt ovenfor. Det er informasjon som mangler. Innfør en variabel $a \in \mathbb{R}$ der det er nødvendig.

(b) Hvor mange individer av hvert årskull er det etter ett år når vi antar at populasjonen starter med 10 over-ett-åringer og 15 under-ett-åringer? Hvor mange individer av hvert årskull er det etter to år? Svaret er avhengig av variablen a som du innførte. Disse antakelsene med hensyn på initialpopulasjonen gjelder bare her, ikke i (d) nedenfor.

(c) Målingene har vist at populasjonen vokser langsiktig med en vekstrate $r = \frac{5}{2}$, dvs. etter ett år er populasjonen rundt $\frac{5}{2}$ ganger så stor som før. Med utgangspunkt i denne informasjonen, bestem verdien av variabelen a. Du trenger ikke å vise alle utregningene dine, men det må være forståelig og reproduserbart hva du har gjort og hvorfor (beskriv det med egne ord).

   Feil svar: Lesliematrisen er gitt som $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Hvis du ikke klarer å finne $\mathbf{L}$ i (c), kan du bruke dette resultatet i (d), men da får du ikke noe poeng for (c).

(d) Med hensyn på initialpopulasjonen vet vi bare at antall under-ett-årige ligger mellom åtte og tolv, og antall over-ett-årige ligger mellom seks og ti. Beskriv (eller illustrer grafisk) så nøyaktig som mulig hva vi kan si om populasjonen etter ett <u>**og**</u> etter to år.

Løsningsforslag

(a) Leslie-modellen har to kull, dermed er Leslie-matrisen 2×2: $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{1,2} \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix}$. Bare en sjettedel av ett-årige overlever en tidsperiode. Så må $l_{2,1} = \frac{1}{6}$. Alle to-årige dør: $l_{2,2} = 0$. Ett-årige får (i gjennomsnitt) to (hunkjønn) barn: $l_{1,1} = 2$. Vi vet ingenting om hvor mange barn to-årige får ($l_{1,2} = a$). Til sammen får man $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & a \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Her antar man at det er ved tidspunkt $t = 0$ en populasjon av $\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$. Leslie-modellen beskriver utviklingen fra en tidsperiode (år) til den neste med matrise-vektor-multiplikasjon. Man får dermed:

$$\text{etter ett år}\quad \boldsymbol{p}_1 = \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 15 + a\cdot 10 \\ \frac{1}{6}\cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\cdot a + 30 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{etter to år}\quad \boldsymbol{p}_2 = \mathbf{L}\cdot\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10\cdot a + 30 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cdot a + 60 + \frac{5}{2}\cdot a \\ \frac{1}{6}\cdot(10\cdot a + 30) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{45}{2}\cdot a + 60 \\ \frac{5}{3}\cdot a + 5 \end{pmatrix}$$

(c) For å finne ut hvordan populasjonen foranderer seg i det lange løp, må man analysere **L** med hensyn på dens egenverdier. Det karakteristiske polynomet er

$$p_{\mathbf{L}}(\lambda) = \det(\mathbf{L} - \lambda\cdot\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & a \\ \frac{1}{6} & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-\lambda) - \tfrac{a}{6} = \lambda^2 - 2\cdot\lambda - \tfrac{a}{6}\,.$$

Så får man egenverdiene (røtene, f.eks. med p-q-formlen)

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 + a/6}\,,\quad \lambda_1 = 1 - \sqrt{1 + a/6}\,.$$

Siden røtene ikke er negative, er λ_1 (også i absoluttverdi) større enn λ_2 og den dominerende egenverdien. Den tilsvarer dermed vekstraten; vi må løse

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{1 + a/6} \overset{!}{=} \tfrac{5}{2} = r$$

for å finne a. Operasjonene «-1», «$()^2$», «-1» og «$\cdot 6$» gir verdien: $a = \frac{15}{2}$.

(d) Som sett i (b) kan utviklingen beskrives som matrise-vektor-produkt. Fra grensene på initialpopulasjonene vet vi at $\boldsymbol{p}_0$ må ligge i et rektangel med hjørnene $\{(8,6),(8,10),(12,10),(12,6)\}$. Bildet av et rektangel er en firkant (rette linjer avbildes på rette linjer), t.o.m. et parallellogram (parallele linjer forbli parallele). For å bestemme dens hjørner, bestemmer vi bilder av de opprinnelige hjørnene. Det er raskest som matrise-matrise-produkt (men kan like godt gjøres etter hvert, se nedenfor for «feil løsning»):

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 & 8 & 12 & 12 \\ 6 & 10 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & 91 & 69 & 99 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Så: Antall under-ett-åriger ligger mellom 61 og 99 og over-ett-årige mellom $\frac{4}{3}$ (kan rundes til 1) og 2. Litt mer nøyaktig: populasjonen ligger i firkanten med hjørnene

$$\{(61, 4/3), (91, 4/3), (69, 2), (99, 2)\}\,.$$

Det samme (hjørne til hjørne og bildet er et parallellogram) kan man gjøre for etter to år

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}\right)^2\cdot\begin{pmatrix} 8 & 8 & 12 & 12 \\ 6 & 10 & 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 & 192 & 153 & 213 \\ \frac{61}{6} & \frac{91}{6} & \frac{23}{2} & \frac{33}{2} \end{pmatrix}$$

Løsning for «feil» svar: Geometrisk sjker det samme; hjørnene avbildes bare til andre punkt, siden vi bruker en feil Leslie matrise.

$$\text{ett år } \mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}36\\7\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}44\\9\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}48\\9\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}56\\11\end{pmatrix}$$

$$\text{to år } \mathbf{L}^2\cdot\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix} = \mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}36\\7\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}122\\\frac{43}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}^2\cdot\begin{pmatrix}8\\10\end{pmatrix} = \mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}44\\9\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}150\\\frac{53}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}^2\cdot\begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix} = \mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}48\\9\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}162\\\frac{57}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{L}^2\cdot\begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} = \mathbf{L}\cdot\begin{pmatrix}56\\11\end{pmatrix} = ... = \begin{pmatrix}190\\\frac{67}{2}\end{pmatrix}$$

Siste vektorene kan (men trenger ikke) rundes til heltall.

△

Oppgave 3

(a) Vi ser på en logistisk vekstmodell

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = g(N(t)) = \alpha\cdot N(t)\cdot\left(1-\frac{N(t)}{M}\right), \quad N(0) = N_0 > 0\,,$$

med indre vekstrate $\alpha = \frac{1}{10}$ og bæreevne $M > 0$.

Beskriv med egne ord hvordan man kan bestemme løsningen $N(t)$. Det er ikke nødvendig å forklare hvert trinn i regningen, men idéen må være forståelig (og det er tillatt å bruke formler, hvis dette forenkler forklaringen). I beskrivelsen, bruk ordene ≪separabel≫, ≪delbrøksoppspaltning≫, ≪initialbetingelse≫ og ≪integrasjon≫ (i riktig kontekst).

(b) Vi betrakter en vekstmodell som kan beskrives med den skalare differensialligninga

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} = f(P(t))\,, \quad P(0) = P_0 \in \mathbb{R}\,, \quad P(t) \geq 0$$

med tid $t \geq 0$ og

(i) $f(P) = 0.4\cdot P$

(ii) $f(P) = 0.2\cdot(300\cdot P - P^2)$

(iii) $f(P) = 0.6 \cdot (400 - P) \cdot P \cdot (P - 20)$

Hvilke modeller inneholder hvilke av de følgende trekk og hvorfor/hvorfor ikke? Skriv et avsnitt med egne ord for alle de trekkene (1) til (4). Du kan (men trenger ikke) bruke et P-$f(P)$-koordinatsystem.

Tips: Du trenger ikke å løse differensialligningene.

(1) Hvis initialpopulasjonen P_0 er null, så er det ingen vekst: $P(t) \equiv 0$ for alle $t \geq 0$.

(2) Hvis initialpopulasjonen P_0 er mindre enn 50, dør populasjonen ut.

(3) Hvis initialpopulasjonen P_0 er veldig stor, så minker populasjonen i begynnelsen.

(4) For enhver positiv initialpopulasjon $P_0 > 0$ nærmer $P(t)$ seg en endelig verdi for $t \to \infty$.

Løsningsforslag

(a) Differensialligninga er **separabel**, fordi den er autonom. Det betyr, for å løse den kan man separere variabler idet man multipliserer (formelt) med $\mathrm{d}t$ og deler gjennom den høyre sida $g(N)$. Man får på begge sider av ligninga et infinitesimalt uttrykk (dvs. en ≪d-noe≫). Ubestemt **Integrasjon** (igjen formelt) på begge sider gir oss en meningful verdi. På $\mathrm{d}t$-siden er integrasjon enkelt, på $\mathrm{d}N$-siden trenger man (eller kan man bruke) **delbrøksoppspaltning**, fordi det er en rasjonal integrand i N. Det resultatet blir så løst med hensyn på N og integrasjonskonstanten blir bestemt med hjelp av **intialbetingelsene**.

Fulstendig: Man må se på $N_0 = 0$ og $N_0 = M$ ekstra, men dette er ikke viktig her.

(b) (1) ≪Ingen vekst≫ betyr at tidsderiverte blir null. Vi må derfor sjekke om $f(P = 0)$ blir null:
(i) $f(0) = 0.4 \cdot 0 = 0$ ✓
(ii) $f(0) = 0.2 \cdot (300 \cdot 0 - 0) = 0$ ✓
(iii) $f(0) = 0.6 \cdot (400 - 0) \cdot 0 \cdot (0 - 20) = 0$ ✓.

(2) Populasjonen dør ut hvis $g(P) < 0$ for alle P med $0 < P < 50$.
(i) $f(5) = 2 > 0$ (feil)
(ii) $f(10) = 580 > 0$ (feil)
(iii) $f(20) = 0$ (feil).

(3) Populasjonen minker hvis dens tidsderiverte er negativ. (Siden diff.-lingninga er autonom, er tida ikke viktig her.)
(i) $f(P) > 0$ for alle $P > 0$ (feil)
(ii) Hvis $P > 300$ får man $f(P) = 0.2 \cdot (300 \cdot P - P^2) = \underbrace{0.2}_{>0} \cdot \underbrace{P}_{>0} \cdot \underbrace{(300 - P)}_{<0} < 0$ ✓
(iii) Hvis $P > 400$ får man $f(P) = \underbrace{0.6}_{>0} \cdot \underbrace{(400 - P)}_{<0} \cdot \underbrace{P}_{>0} \cdot \underbrace{(P - 20)}_{>0} < 0$ ✓

(4) For en fulstendig løsning trenger vi å undersøke stabiliteten til de (positive) likevektløsningene her.
(i) Det er eksponesiell vekst. Dette tilnærmer seg ikke en endelig verdi, men går mot uendelig (feil)
(ii) Det er en logistisk modell, siden $f(P) = 0.2 \cdot (300 \cdot P - P^2) = 60 \cdot P \cdot (1 - P/300)$. Vi

vet fra forelesningen (se også læreboka s. 401) at det finnes bare én positiv likevekt og den er stabil. (Dette er nok for fulle poeng.)

Litt mer detaljert: Hvis $P_0 > 300$ minker løsningene og tilnærmer seg 300 (endelig), for $P_0 = 300$ er løsningen konstant (tilnærmer seg også 300), for $0 < P_0 < 300$ vokser alle løsningene, men de tilnærmer seg fortsatt 300. ✓

(iii) Likevektene: $f(P) \stackrel{!}{=} 0$: $P = P_a = 0$ eller $P = P_b = 20$ eller $P = P_c = 400$. Stabilitet av P_a: Se på $g'(P_a) = ... = -\frac{5}{6} \cdot P_a^2 + 336 \cdot P_a - 3200 = -3200 < 0$ (stabil); Stabilitet av P_b: Se på $g'(P_b) = ... = -\frac{5}{6} \cdot P_b^2 + 336 \cdot P_b - 3200 = 3040 > 0$ (ustabil); Stabilitet av P_c: Se på $g'(P_c) = ... = -\frac{5}{6} \cdot P_c^2 + 336 \cdot P_c - 3200 = -60800 < 0$ (stabil)

Vi kan dele opp mulige intervaller for P_0:

- $P_0 > 20$: Tilnærming mot $P_c = 400$ (endelig)
- $P_0 = 20$: Konstant utvikling $P \equiv 20$ (endelig)
- $0 < P_0 < 20$: Tilnærming mot $P_a = 0$ (endelig)

(Disse utasagn er enklere å vise med hjelp av et koordinatsystem som ville også ha vært nok.)

Til sammen: utsagn er riktig. ✓

△

Oppgave 4 Vi ser på den rasjonale funksjonen

$$p(x) = \frac{9 \cdot x + 6}{(x+3) \cdot x \cdot (x-4)} .$$

Oppgaven er å bestemme dens delbrøksoppspaltning ved å skrive $p(x)$ som en vekted sum av ≪enklere≫ funksjoner.

(a) Gjør et anslag for den vektede summen (se forelesningen).

(b) Koeffisientene (vektene) kan bestemmes som løsning av et lineært ligningssystem hvis vi ser på p sine verdier for $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$. Skriv det tilsvarende systemet på formen ≪matrise ganger vektor er lik vektor≫. Du trenger ikke å løse systemet.

(c) Kunne man ha brukt $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ for å bestemme løsningen? Hvorfor/hvorfor ikke? Beskriv med egne ord.

Løsningsforslag

(a) Vi vet fra forelesningen at delbrøksoppspaltningen består av inverse lineære funksjoner, siden alle røtene i nevnerpolynomet er enkle. Anslaget er derfor

$$p(x) = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-4}$$

med $A, B, C \in \mathbb{R}$.

(b) Vi skriver $p(x)$ med det rasjonale uttrykket og den vektede summen fra delbrøksoppspaltingen. Det git tre lineære ligninger:

$$\begin{aligned} p(1) &= \frac{9\cdot 1+6}{(1+3)\cdot 1\cdot(1-4)} = -\frac{5}{4} && = \tfrac{1}{4}\cdot A + 1\cdot B - \tfrac{1}{3}\cdot C = \frac{A}{1+3}+\frac{B}{1}+\frac{C}{1-4} \\ p(2) &= \frac{9\cdot 2+6}{(2+3)\cdot 2\cdot(2-4)} = -\frac{6}{5} && = \tfrac{1}{5}\cdot A + \tfrac{1}{2}\cdot B - \tfrac{1}{2}\cdot C = \frac{A}{2+3}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2-4} \\ p(3) &= \frac{9\cdot 3+6}{(3+3)\cdot 3\cdot(3-4)} = -\frac{11}{6} && = \tfrac{1}{6}\cdot A + \tfrac{1}{3}\cdot B - 1\cdot C = \frac{A}{3+3}+\frac{B}{3}+\frac{C}{3-4} \end{aligned}$$

Som matrise-form lineært ligningssystem får man $\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ med

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ og } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{6}{5} \\ -\frac{11}{6} \end{pmatrix}$$

Løsningen er $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{3}{2}$.

(c) **Versjon A:** Rett og slett: $x = -3$ betyr divisjon på null. Så, det er ikke mulig.

Versjon B: Man kan bruke $x = -3$, men for å gjøre dette, må man multiplisere ligningen med $(x+3)$ først. Vi vet fra forelesningen at det er lov å gjøre det sånt. Å sette $x = -3$ gir oss $A = -1$ og vi kan bruke dette for å regne ut B og C som løsningene av et 2×2 system etterpå.

△

Oppgave 5 En legering av jern, kopper og sølv skal produseres ved å blande tre legeringer L_1, L_2, L_3 som inneholder følgende mengder (i prosent) av de tre metallene

	jern	kopper	sølv
L_1	20	60	20
L_2	70	10	20
L_3	50	50	0

(a) Sett opp et lineært system for å bestemme hvor mye av hver legering som trengs for å lage en legering med 40% jern, 50% kopper og 10% sølv. Løs dette systemet. Du trenger ikke vise detaljene, men beskriv hva resultatet betyr.

(b) Er det mulig (når man bare ser på det lineære systemet) å finne koeffisienter slik at man får en legering med 10% jern, 50% kopper og 40% sølv? Hvorfor/hvorfor ikke? Hvis ja: Gir denne matematiske løsningen praktisk mening? Hvorfor/hvorfor ikke?

Løsningsforslag

(a) Vi leter etter tre tall som beskriver antallene av de tre legeringene. De kan kalles x_1 (for L_1), x_2 (for L_2) og x_3 (for L_3). Vi blir gitt tre betyngelser her (kan multipliseres med 100, men er faktisk andeler):

$$\begin{aligned}
&\text{40\% jern} && 0.2 \cdot x_1 + 0.7 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3 = 0.4 \\
&\text{50\% kopper} && 0.6 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3 = 0.5 \\
&\text{10\% sølv} && 0.2 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0.1
\end{aligned}$$

eller

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ med } \mathbf{A} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 6 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

(Å kreve at $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ville vært fint også.) Løsningen (éntydig, bestemmes f.eks. med Gauss algoritmus) er: $(x_1, x_2, x_3) = (0.4, 0.1, 0.5)$.

Det betyr: Legeringen må bestå av 40% L_1, 10% L_2 og 50% L_3.

(b) Andre målandeler tilsvarer en annen høyre side $\boldsymbol{b}$. Det er mulig å bestemme koeffisienter $\boldsymbol{x}$ slik at problemet kan løses, fordi $\det(A) \neq 0$ (vet vi fra éntydig løsning i (b)) sånn at man kan løse $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ for *alle* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$).

Men: Løsningen kan ikke gi praktisk mening, siden alle legeringene som blir brukt har mer enn 15 prosent jern. En blandning kan ikke ha mindre enn dette (burde ha ti prosent).

Faktisk: Løsning blir $x_1 = 8/5$, $x_2 = 2/5$, $x_3 = -1 < 0$(!).

△

Oppgave 6 I forelesningen så vi at en retningsderivert $D_{\boldsymbol{v}} g(x, y)$ ($\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^\top \in \mathbb{R}^2$, $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kontinuerlig deriverbar) kunne skrives som et skalarprodukt

$$D_{\boldsymbol{v}} g(x, y) = \left(\nabla g(x, y)\right)^\top \cdot \boldsymbol{v} \,.$$

(a) Bruk dette og sammenhengen mellom skalarproduktet av to vektorer og vinkelen mellom dem for å vise at retningen med størst vekst av g i punktet (x, y) er g's gradient. Forklaringen din må inneholde begrepene «kritisk punkt», «sirkel» og «intervall» (i riktig kontekst). Du kan anta at $\boldsymbol{v}$ har lengde 1.

(b) En isbjørn står på et isflak. Dets overflate kan beskrives med funksjonen

$$i(x, y) = \left(y + x^2\right) \cdot \mathrm{e}^{-x^2 - 2 \cdot y^2} - \frac{1}{4} \,,$$

der verdien $i(x, y)$ beskriver høyden over vannet av isflaket med koordinater (x, y) så langt den er større enn null.

(i) Isbjørnen står ved koordinatene $(x, y) = \left(-1, \frac{1}{6}\right)$. I hvilken retning sklir den, når man anta at tyngdekraften tar den hvor isen er brattest? Vis regningen din detaljert. Du trenger ikke normalisere vektoren som beskriver retningen.

(ii) Isfjellet har to punkt med maksimal høyden. Bestem disse to punktene og deres høyde over vannet.

Tips: y-koordinatene av alle maksima er $y = \frac{1}{4}$ og du trenger bare vise at de er kritiske punkt.

Løsningsforslag

(a) Løsningen står i læreboka (side 543, uten detaljert forklaring av hvorfor kosinus har maksimalverdien i null) på engelsk.

Forslag her: Den retningsderiverte viser hvor raskt funksjonen g vokser langs stien $w(t) = (x + t \cdot v_1, y + t \cdot v_2)^\top$ med hensyn på t. Retning av størst vekst oversetter dermed til «retning av størst retningsderiverte» (når vi bare ser på enhetsvektor-retninger).

Sammenhengen mellom skalarproduktet av to vektorer $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ og vinkelen ϕ er:

$$\boldsymbol{w}^\top \cdot \boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{w}\| \cdot \|\boldsymbol{u}\| \cdot \cos\phi\,.$$

Når vi velger $\boldsymbol{w}$ som $\nabla g(x, y)$ og $\boldsymbol{u}$ som $\boldsymbol{v}$ blir det

$$D_{\boldsymbol{v}} g(x, y) = \|\nabla g(x, y)\| \cdot \underbrace{1}_{=\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \cos\phi =: f(\phi)\,.$$

Vi må derfor bare finne ut, for hvilken vinkel ϕ uttrykket blir maksimalt, dvs. problemet ble overført til et skalart optimeringsproblem $\max_\phi f(\phi)$.

For å finne ekstremalverdier ser vi på **kritiske punkt**, dvs. verdier av ϕ, der $f'(\phi) = -\|\nabla g(x, y)\| \cdot \sin\phi$ blir null. Dette gjelder for alle $\phi = k \cdot \pi$ med $k \in \mathbb{Z}$.

Faktisk trenger vi ikke å bestemme alle optima til det, siden vi bare ser på **sirkelen** rundt (x, y), dvs. det er nok å se på maksimalverdien for alle verdiene av ϕ i et **intervall** med lengde $2 \cdot \pi$. Når vi velger $\phi \in [-\pi, \pi]$, ser vi at $\phi = 0$ er et kritisk punkt og det sjekkes enkelt at det er en maksimalverdi. For alle andre ϕ i intervallet blir f mindre, sånn at $\phi = 0$ faktisk er alt vi trenger her.

Betydningen av $\phi = 0$ er at vinkelen mellom $\boldsymbol{v}$ og $\nabla g(x, y)$ må være null, dvs. at de viser i samme retning.

(b) (i) Isen er brattest i motsatt retning av gradienten. Den regnes ut med produktregelen og kjenereregelen (for partialderiverte)

$$\begin{aligned}
\nabla i(x,y) &= \begin{pmatrix} \partial_x i(x,y) \\ \partial_y i(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\partial_x(y+x^2)) \cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} + (y+x^2)\cdot(\partial_x \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2}) \\ (\partial_y(y+x^2)) \cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} + (y+x^2)\cdot(\partial_y \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} + (y+x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2}\cdot \partial_x(-x^2-2\cdot y^2) \\ 1\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} + (y+x^2)\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2}\cdot \partial_y(-x^2-2\cdot y^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} - 2\cdot\big(x^2+y\big)\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} \\ \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} - 4\cdot\big(x^2+y\big)\cdot y\cdot \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

I punktet der bjørnen står er så

$$\begin{aligned}
\nabla i(-1,\tfrac{1}{6}) &= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1)\cdot \mathrm{e}^{-(-1)^2-2\cdot(\frac{1}{6})^2} - 2\cdot\big((-1)^2+\frac{1}{6}\big)\cdot x(-1)\cdot \mathrm{e}^{-(-1)^2-2\cdot(\frac{1}{6})^2} \\ \mathrm{e}^{-(-1)^2-2\cdot(\frac{1}{6})^2} - 4\cdot\big((-1)^2+\frac{1}{6}\big)\cdot y\cdot \mathrm{e}^{-(-1)^2-2\cdot(\frac{1}{6})^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{19}{18}}}{3} \\ \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{19}{18}}}{9} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.116 \\ 0.077 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Isbjørnen sklier dermed i retningen $\begin{pmatrix} -0.116 \\ -0.077 \end{pmatrix}$.

(ii) Bestem kritiske punkt: Gradienten er (se (a))

$$\nabla i(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-2\cdot y}\cdot \begin{pmatrix} 2\cdot x - 2\cdot x\cdot(x^2+y) \\ 1-4\cdot y\cdot(x^2+y) \end{pmatrix}$$

Sett gradienten lik null (eksponensialfunksjonen $\neq 0$):

$$2\cdot x - 2\cdot x\cdot(x^2+y) = 0 = 1-4\cdot y\cdot(x^2+y)$$

Nå bruk hjelpa, dvs. $y=\frac{1}{4}$ (høyre sida først):

$$0 = 1-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(x^2+\tfrac{1}{4}) = 1-(x^2+\tfrac{1}{4}) \implies x^2 = \frac{3}{4} \implies x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vi får så to maksimalverdier ved $(x,y) = (\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4})$ og $(x,y) = (-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{4})$ med samme funksjonsverdi

$$i = \mathrm{e}^{-7/8} - \tfrac{1}{4} \approx 0.167\,.$$

△

Oppgave 7 Se på differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_1^2 - y_2 \\ y_2'(x) &= y_1 + y_2\,. \end{aligned}$$

(a) Skissér null-isoklinene til systemet.

(b) Bestem alle likevektløsningene til systemet.

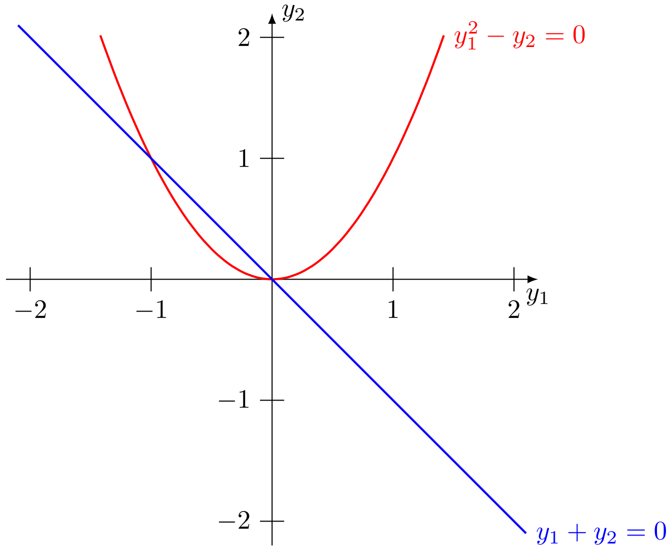
(c) Avgjør hvilke av likevektene som er stabile eller ustabile og forklar hvorfor.

Det er ikke viktig å vise alle detaljene i regningen, men det må være mulig å følge tankegangen.

Løsningsforslag

(a) Null-isoklinene er kurver, der minst en komponente av den høyre sida blir null, dvs.

$$y_1^2 - y_2 = 0 \implies y_2 = y_1^2\,, \quad y_1 + y_2 = 0 \implies y_2 = -y_1\,.$$



(b) Likevektløsningene: punkt der null-isoklinene skjærer hverandre.

$$(1)\!: (y_1, y_2) = (0,0)\,, \qquad (2)\!: (y_1, y_2) = (-1,1)\,.$$

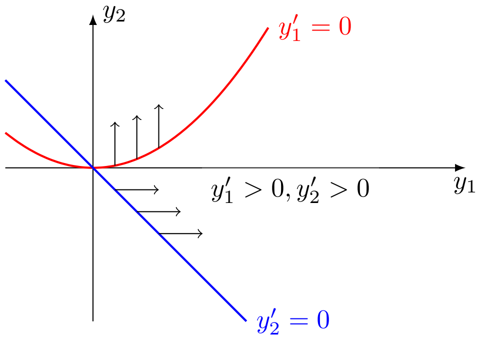
(c) Jacobimatrisen til systemet er gitt som

$$J(y_1, y_2) := \partial_{(y_1,y_2)} \begin{pmatrix} y_1^2 - y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot y_1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I likevekten (1) gjelder dermed

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi kan ikke finne ut noe om stabiliteten fra lineæriseringen, siden $J(0,0)$ har ingen (reelle) egenverdier. Likevel er det mulig å si noe om stabiliteten når vi ser på retningsfeltet (se nedenfor): Hvis initialverdien ligger litt «til høyre» av likevekten, så kan løsningene i y_1 og y_2 bare øke, dvs. bevege seg bort fra $(0,0)$. dermed er likevekten ikke stabil.



I likevekten (2) gjelder det

$$J(-1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies \lambda = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

En egenverdi er større enn null og dermed er likevekten ustabil.

$\triangle$