Brukerkurs Matematikk B, Vår 2022

NTNU

21. januar 2022

Denne notatsammlingen ble laget av forskjellige kilder som ble brukt i kurset “MA0002 - Brukerkurs Matematikk B” ved NTNU de siste årene. Spesielt:

- Notatene av Agamemnon Zafeiropoulos fra våren 2021,
- Presentasjonene av Frode Rønning fra våren 2017, og
- Materialene fra Karl K. Brustad fra tidligere semestre

Dette er *ikke* en erstatning for kursets hovedressurs som er

Calculus for Biology and Medicine, 3je edisjon by C. Neuhauser.

Innhold

Kapittel 1

Integrasjonsteknikker

1.1 Litt Repetisjon

1.1.1 Integrasjon: Hva og Hvorfor?

1.1.2 Analysens Fundamentalteorem

Derivasjon er prosessen da man regner ut stigningstallet til en funksjon. Derivasjonesregler og eksempler kan bli funnet i Tillegg A.7. Integrasjon beskriver en metode for å regne ut arealer under en kurve/mellom kurver.

Analysens fundamentalteorem sier at integrasjon er på en måte den motsatte operasjonen til derivasjon. Det gjelder:

Teorem 1.1. *Antar at $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon og at $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ er en antiderivert til f, dvs. $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in (a,b)$. Så gjelder det*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)\,.$$

Praktisk betyr det at vi kan finne antideriverte til funksjoner ved å omgjøre derivasjonsregler.

1.2 Substitusjon

En viktig regel i derivasjon er *kjerneregelen*. Den kan brukes for å finne den deriverten til en *funksjon av en annen funksjon* (en sammensatt funksjon):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

(In-) definit integrasjon av kjerneregelen og analysens fundamentalteorem gir oss dermed:

Teorem 1.2 (Substitusjonsteknikk)**.** *Anta $u = g(x)$.*

(a) Det gjelder

$$\int f'(u) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int f'(u)\mathrm{d}u = f(g(x)) + C$$

med $C \in \mathbb{R}$.

(b) Fremover gjelder det

$$\int_a^b f'(u) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = [f(u)]_{g(a)}^{g(b)} = [f(g(x))]_a^b\ .$$

Eksempel 1.1. (i) **Oppgave:** Finn en antiderivert til funksjonen $h(x) = 4 \cdot x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$.

Løsningsforslag: Vi kan definere $f'(g) = \sqrt{g}$ og $g(x) = u = x^2 + 1$. Dermed får vi

$$\int h(x)\mathrm{d}x = \int 4x\sqrt{x^2+1} = 2 \cdot \int \underbrace{2x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{=f'(u)} = 2 \cdot \int f'(u)\mathrm{d}u = 2 \cdot \int \sqrt{u}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{3/2} \cdot u^{3/2} + C = \frac{4}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\,.$$

(ii) **Oppgave:** Finn en antiderivert til tangens-funksjonen.

Løsningsforslag: Vi vet at $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ er definert som brøken når man deler $\sin x$ på $\cos x$. Siden $(\cos x)' = -\sin x$ kan vi velge $g(x) = u := \cos x$, $f'(u) = \frac{1}{u}$, $(f(u) = \ln|u|)$ og får

$$\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{u(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{u} \cdot u'\mathrm{d}x = -\int f'(u) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C\,.$$

Praktisk er det ofte ikke åpenbart, hvilken del skal brukes som $g = u$ i substitusjonsteknikken og hvordan man identifiserer $f(u)$ (tom. $f'(u)$). I Eksempel 1.1(i) er det ikke klar før, at man må ta faktoren "2" foran integralet først og i (ii) måtte vi ta et minustegn foran integralet først. Derfor bestemmer man seg (i håndregninger) for en $u = g(x)$ (og ikke f(!)) og bruker Leibniz notasjon:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)} \qquad \implies \int F(g(x), x)\mathrm{d}x = \int \frac{F(u,x)}{g'(x)}\mathrm{d}u\,,$$

Eksempel 1.2. (i) **Oppgave:** Finn en antideriverte til $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$ ved å bruke substitusjonen $u = x^2 + 1$.

Løsningsforslag: Deriverte til substitusjonen u er gitt som $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$ (også $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$)og det er ikke nødvendig å velge $f(u)$. Man får

$$\int h(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+1| + C\,.$$

(ii) **Oppgave:** Bestem

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

Løsningsforslag: Eksponenten i exponensialfunksjonen er en god kandidat for substitusjonen siden $\exp(\cdot)$ integreres enkelt. Man får

$$\begin{array}{lll} u = \dfrac{1}{x} & \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-1}{x^2} & \Rightarrow\ \mathrm{d}x = -x^2\mathrm{d}u \\ x = \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & u = 2 \\ x = 1 & \Leftrightarrow & u = 1 \end{array}$$

og dermed

$$I = \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{e}^u \cdot (-x^2\mathrm{d}u) = \int_{u=2}^{u=1} -\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = [-\mathrm{e}^u]_2^1 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\,.$$

NB: Man trenger ikke å regne ut de nye verdiene for u ved grensene når man tilbaksubstituerer, dvs.

$$I = \int_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} -\mathrm{e}^u\mathrm{d}u = [-\mathrm{e}^u]_{x=\frac{1}{2}}^{x=1} = \left[\mathrm{e}^{1/x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\,.$$

Randbemerkning 1.1. *Dessverre finnes det ikke en regel for å regne ut antideriverte til sammensatte funksjoner. For å bruke substitusjon må integranden ha en spesiell form $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ allerede. Det finnes* klasser av funksjoner *som alltid kan integreres ved å bruke substitusjon, men ikke en enkel oppskrift for å finne en god en.*

1.3 Delvis Integrasjon

Når man vil finne den deriverten til et *produkt av to (eller flere) funsjoner* kan man bruke *produktregelen*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u(x)\cdot v(x)\right) = \left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\,.$$

Teorem 1.3 (Delvis Integrasjon)**.** *Hvis $u(x)$ og $v(x)$ er deriverbare funksjoner, så*

$$\int u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x\,.$$

Spesielt gjelder for definite integraler

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x\,.$$

Eksempel 1.3. (i) **Oppgave:** Finn en antiderivert til $h(x) := x\cdot\ln x$ for $x > 0$.

Løsningsforslag: Vi bruker delvis integrasjon med

$$u = \ln x \implies u' = \frac{1}{x} \qquad v' = x \implies v = \frac{1}{2}\cdot x^2\,.$$

Så får vi

$$\int h(x)\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot x^2}_{v}\cdot\underbrace{\ln x}_{u} - \int\underbrace{\frac{1}{2}\cdot x^2}_{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \int\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4} + C\,.$$

(ii) Hvis vi kjenner $F'(x)$ når vi ønsker å regen ut $\int F(x)\mathrm{d}x$ kan det hjelpe å bruke delvis integrasjon sånn:

$$\int F(x)\mathrm{d}x = \int (x)'\cdot F(x)\mathrm{d}x = x\cdot F(x) - \int x\cdot F'(x)\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

(a) For å finne en antideriverte til logaritmusfunksjonen kan vi bruke (1.1)

$$\int \ln x\mathrm{d}x = \int (x)'\cdot\ln x\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - \int x\cdot(\ln x)'\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\tfrac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$= x\ln x - x + C\,.$$

(b) Likevel fungerer dette for å regne ut en antideriverte til arctan:

$$\begin{aligned}\int \arctan x\mathrm{d}x &= \int (x)'\cdot\arctan x\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\arctan x - \int x\cdot(\arctan x)'\mathrm{d}x = x\cdot\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &\overset{\substack{u=1+x^2\\ x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}u}}{=} x\cdot\arctan x - \int\frac{\mathrm{d}u}{2u} = x\cdot\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= x\cdot\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln|1+x^2| + C\,.\end{aligned}$$

(iii) Av og til (spesielt når trigonometriske eller eksponensialfunksjoner er til stede) er det nødvendig å bruke delvis integrasjon flere enn én gang.

(a) Regn ut $\int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 x^2 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \cdot (\mathrm{e}^x)' \mathrm{d}x = \left[x^2 \mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \int_0^1 2x \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e} - \int_0^1 2x (\mathrm{e}^x)' \mathrm{d}x = \mathrm{e} - \left([2x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int (2x)' \cdot \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \right) = \mathrm{e} - 2\mathrm{e} + \int_0^1 2\mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$
$$= -\mathrm{e} + [2\mathrm{e}^x]_0^1 = -\mathrm{e} + 2\mathrm{e} - 2 = \mathrm{e} - 2\,.$$

(b) Bestem $I := \int \mathrm{e}^x \cdot \cos x \mathrm{d}x$.

$$I = \int (\mathrm{e}^x)' \cdot \cos x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cdot \cos x - \int \mathrm{e}^x \cdot (\cos x)' \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cdot \cos x + \int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cdot \cos x + \int (\mathrm{e}^x)' \cdot \sin x \mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x \cdot \cos x + \mathrm{e}^x \cdot \sin x - \int \mathrm{e}^x \cdot (\sin x)' \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \cdot \cos x + \mathrm{e}^x \cdot \sin x - \int \mathrm{e}^x \cdot \cos x \mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^x \cdot \cos x + \mathrm{e}^x \cdot \sin x - I + C\,.$$

Derfor gjelder $2I = \mathrm{e}^x \cdot (\cos x + \sin x) + C$ og vi får

$$I = \frac{\mathrm{e}^x}{2} \cdot (\cos x + \sin x) + \tilde{C}\,.$$

1.4 Delbrøksoppspalting

Et n-te grads *polynom* $p(x)$ (med $n \in \mathbb{N}$) er en funksjon som kan skrives som

$$p(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0\,, \quad (a_n \neq 0).$$

Nullte grads polynomer (dvs. konstante funksjoner) er dermed også polynomer og vi skal regne $p(x) \equiv 0$ (nullpolynomet) også til polynomene.* Integrasjonsregelen $\int (k+1) \cdot x^k \mathrm{d}x = x^{k+1} + C$ og integralets lineæritet kan brukes for å finne antideriverte til samtlige polynomer.

En *rasjonal funksjon* $f(x)$ er en kvotient av to polynomer

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,, \qquad p \text{ og } q \text{ polynomer, } q \text{ ikke nullpolynom.}$$

Eksempel 1.4. Funksjonene

$$f_1(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}\,, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}\,,$$
$$f_3(x) = x^3 - 2x + 3 = \frac{x^3 - 2x + 3}{1}\,, \qquad f_4(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \begin{cases} x+1 & \text{for } x \neq 1 \\ \text{uforklart} & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

er rasjonale funksjoner. Funksjonen $f_5(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ er *ikke* en rasjonal funksjon. (NB: Vi kaller det et trigonometrisk rasjonal funksjon.)

Til alle rasjonale funsjoner kan man finne en antiderivert (så langt man klarer å finne rotene til nevneren). Verktøyet for å nå dette er *delbrøksoppspaltning* som beskriver prosessen av å dele opp en rasjonale funsksjon i en summe hvor hver summand kan integreres på en 'enkelt' måte (dvs. ved å se på en forholdsvis kort tabell).

* "≡" er en fancy måte å skrive "Funksjonen er lik noe konstant for alle argumenter."

Randbemerkning 1.2 (Anvendelser). *(a) Rasjonale funksjoner brukes i natur- og ingeniørvitenskap ofte når man har målt data og vil finne en funksjon som tilnærmer datapunktene godt. Fordelen av rasjonale funksjoner (motsatt polynomer) er at disse funksjonene kan ha poler og/eller begrenste asymptoter som er ofte viktig i praksis.*

(b) I (bio-)kjemi og data-science er det vanlig å bruke rasjonale funksjoner for å beskrive aktivering eller represjonseffekter i interaksjoner av kjemiske/biologiske/nettverk-komponenter. Det er ganske enkelt å finne funksjoner i denne klassen som har akkurat de egenskapene man trenger ofte i sammenheng med anvendelser i 'ekte verden', hvor det ikke er mulig at ting vokser uendelig store.

1.4.1 Ingrediens 1: Polynomdivision

Vi vet allerede at polynomer er en slags funksjon som integreres lett. Også er det en god strategi å "bortdele" polynomer først hvis det er mulig. Faktisk er det alltid mulig hvis tellergraden er ikke lavere enn nevnergraden. Verktøyet her er *polynomdivisjon* (eng: polynomial (long) division). Vi antar at dette er kjent fra videregående, men løser tre oppgaver uansett som repetisjon.

Eksempel 1.5. Oppgave: Bruk polynomdivisjon for å skrive de følgende utrykkene som en summe av et polynom og en rasjonal funksjon med lavere tellergrad enn nevnergrad.

(a) $\dfrac{x}{x+2}$

(b) $\dfrac{x^6+6x^4+7x^2-6}{x^2+3}$

(c) $\dfrac{3x^3-7x^2+17x-3}{x^2-2x+5}$

Løsningsforslag:

(a) Siden teller- og nevnergraden er like, trenger vi bare å se på de første koeffisientene $1/1 = 1$ og får

$$(x) \div (x+2) = 1 + \frac{-2}{x+2}\,.$$

(b) Legg merke til at det er bare partall som eksponenter her og at man ikke får en 'riktig' rasjonal funksjon etterpå. Man får

$$\begin{array}{l}
(x^6+6x^4+7x^2-6) \div (x^2+3) = x^4+3x^2-2 \\
\underline{-(x^6+3x^4)} \\
\qquad 3x^4+7x^2-6 \\
\qquad \underline{-(3x^4+9x^2)} \\
\qquad\qquad -2x^2-6 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x^2-6)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

(c) Her er det flere enn to x-potenser i nevneren. Polynomdivisjon fungerer likevel:

$$\begin{array}{l}
(3x^3-7x^2+17x-3) \div (x^2-2x+5) = 3x-1+\frac{2}{x^2-2x+5} \\
\underline{-(3x^3-6x^2+15x)} \\
\qquad -x^2+2x-3 \\
\qquad \underline{-(-x^2+2x-5)} \\
\qquad\qquad 2
\end{array}$$

1.4.2 Ingrediens 2: (Ekte) Delbrøksoppspalting

Med evnen til å bruke polynomdivisjon klarer vi å dele opp hver rasjonal funksjon i et polynom og en annen rasjonal funksjon da tellergraden er lavere enn nevnergraden. Nå skal vi se hva kan gjøres med disse funksjonene.

Eksempel 1.6. (a) Vi ser på funksjonen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2-3}{(x-1)\cdot(x^2+2x-4)}$.

Det er mulig å bestemme et tall $A \in \mathbb{R}$ og et førstegradspolynom $\bar{p}(x)$ slik at f kan deles opp som:

$$f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)} \quad \text{med } \bar{q}(x) := x^2 + 2x - 4\,. \tag{1.2}$$

For å bestemme denne oppdelingen, antar vi at (1.2) gjelder og slår den høyre sida sammen (igjen):

$$f(x) = \frac{x^2-3}{(x-1)\cdot(x^2+2x-4)} \stackrel{!}{=} \frac{A\cdot\bar{q}(x) + \bar{p}(x)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot\bar{q}(x)}\,.$$

Nevnerne er like her og dermed må også tellerne falle sammen $p(x) = x^2 - 3 \stackrel{!}{=} A\cdot\bar{q}(x) + \bar{p}(x)\cdot(x-1)$. Når vi setter $x = 1$ står det bare $p(1) = -2 = (-1)\cdot A$ og vi får $A = 2$.[†] Nå må vi bare finne et lineært polynom $\bar{p}(x) = ax + b$ sånn at

$$\begin{aligned} p(x) - \underbrace{2}_{=A}\cdot\bar{q}(x) &= (x^2-3) - 2\cdot(x^2+2x-4) = -x^2 - 4x + 5 \\ &\stackrel{!}{=} ax^2 + (b-a)\cdot x + (-b) = (a\cdot x + b)\cdot(x-1) \\ &= \bar{p}(x)\cdot(x-1) \end{aligned}$$

som kan tilfredstilles med valgene $a = -1$, $b = -5$ dvs. det lineære polynomet $\bar{p}(x) = -x - 5$.

(b) Mer generelt: Gitt den rasjonale funksjonen $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ med tellergraden $\deg p(x) = n$ og $\deg q(x) = m$ og $m > n$.

Anta at $q(x)$ kan skrives som

$$q(x) = (x - a_1)\cdot\bar{q}(x)$$

med et $(m-1)$-te grads polynom $\bar{q}(x)$ som tilfredstiller $\bar{q}(a_1) \neq 0$, dvs. anta at a_1 er en enkel rot av $q(x)$. Da kan vi finne et tall $A_1 \in \mathbb{R}$ og et polynom $\bar{p}(x)$ med $\deg p(x) \leq m - 2$, sånn at

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-a_1)\cdot\bar{q}(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{\bar{p}(x)}{\bar{q}(x)}\,.$$

For å finne A_1 or $\bar{p}(x)$ kan vi foregår som i (a) og utvide den høre sida for å få

$$\frac{p(x)}{(x-a_1)\cdot\bar{q}(x)} = \frac{A_1\cdot\bar{q}(x) + \bar{p}(x)\cdot(x-a_1)}{(x-a_1)\cdot\bar{q}(x)}$$

og dermed[‡]

$$p(a_1) = A_1\cdot\bar{q}(a_1) + \bar{p}(a_1)\cdot(a_1 - a_1) \implies A_1 = \frac{p(a_1)}{\bar{q}(a_1)}\,.$$

Nå kjenner vi A_1, vet at

$$p(x) - A_1\cdot\bar{q}(x) = \bar{p}(x)\cdot(x-a_1) \tag{1.3}$$

[†] Her jukser vi litt: Nevneren er også lik null for $x = 1$, men med antakelsen at 1 er en enkel rot er det riktig uansett.
[‡] Og her jukser vi igjen.

og kan regne ut $\bar{p}(b_1)$ for hvert tall $b_1 \neq a_1$ via

$$p(b_1) - A_1 \cdot \bar{q}(b_1) = \bar{p}(b_1) \cdot (b_1 - a_1) \implies \bar{p}(b_1) = \frac{p(b_1) - A_1 \cdot \bar{q}(b_1)}{b_1 - a_1} .$$

Triksen for å finne hele $\bar{p}(x)$ er derivasjon: Vi tar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ på begge sider i (1.3) med produktregelen og setter $x = b_1$ igjen

$$p'(x) - A_1 \cdot \bar{q}'(x) = \bar{p}'(x) \cdot (x - a_1) + \bar{p}(x) \implies \bar{p}'(b_1) = \frac{p'(b_1) - A_1 \cdot \bar{q}'(b_1) - p(b_1)}{b_1 - a_1}$$

Vi fortsetter videre som dette: Med hver derivasjon kan finne en høyere deriverte til $\bar{p}$ ved $x = b_1$. Prosessen slutter siden det bare er polynomer involvert og graden til $\bar{p}(x)$ må være mindre enn $\bar{q}$'s som kan sees i (1.3). Vi vet (se Taylorutvikling fra MA0001) at et $m-2$-dre grads polynom $\bar{p}$ er velbestemt når vi kjenner verdien og de første $m-2$ deriverte til det. Alle disse kan vi regne ut med prosessen som ble forklart her.

Randbemerkning 1.3. *For å regne ut alle koeffisientene til $\bar{p}(x)$ og parameteren A_1 trenger vi ikke å derivere flere ganger. Det er altså mulig å sammenligne koeffisientene i (1.3). Da har vi $m - 1 + 1 = m$ ukjente verdier for å bestemme $\bar{p}(x)$ og A_1 som må sammenlignes med de m koeffisientene i polynomet $p(x) - A_1 \cdot \bar{q}(x) - \bar{p}(x) \cdot (x - a_1) = 0$. Da har vi et system med like mange ukjente som kjente verdier. (Kunsten er å bevise at dette alltid kan løses på en unik måte.)*

Det som ble gjort i Eksempel 1.6(b) kan gjentas flere ganger så langt som $\bar{q}$ bare har enkle roter. Dette fører til det følgende resultatet:

Teorem 1.4 (Delbrøkoppspaltning (forenklet versjon I))**.** *Anta at polynomet $p(x)$ har lavere grad enn polynomet $q(x)$. Dersom $q(x)$ kan skrives som*

$$q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdots (x - a_m) ,$$

dvs. et produkt av m parvist forskjellige *lineære faktorer, så finnes det konstanter A_1, A_2, ..., A_m slik at*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \cdots + \frac{A_m}{x - a_m} .$$

Alle summandene i Teorem 1.4 kan integreres, men det er uansett ikke nok til å integrere alle rasjonale funksjoner. De to polynomene

$$q_1(x) = (x - 1)^2 , \quad \text{og } q_2(x) = x^2 + 1$$

ikke tilfredstiller antakelsene i Teorem 1.4. I tilfellet q_1 er det ikke mulig å separere en linær faktor som ikke samtidig er rot til $\bar{q}(x)$, i tilfellet q_2 er det ingen reelle roter i det hele tatt. Metoden vi brukte fungerer likevel med litt adaptasjon:

Teorem 1.5 (Delbrøkoppspaltning (versjon II))**.** *Anta at nevnerpolynomet $q(x)$ kan faktores til*

$$q(x) = (x - a_1)^{r_1} \cdot (x - a_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_l)^{r_l} \cdot (x^2 + b_1 \cdot x + c_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot ((x^2 + b_m \cdot x + c_m)^{p_m}) \qquad (1.4)$$

med $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, parvist forskjellige faktorer $(x - a_1), \ldots, (x - a_l)$, og $(x^2 + b_1 \cdot x + c_1), (x^2 + b_m \cdot x + c_m)$ og naturlige tall $r_1, \ldots, r_l, p_1, \ldots, p_m \geq 1$. Anta videre at alle poynomene $x^2 - b_k \cdot x + c_k$, $(i = 1, \ldots, k)$ ikke har reelle roter.

Man kan bestemme tall A_i^k, $(i = 1, \ldots, l, k = 1, \ldots q_i)$, og parer (B_i^k, C_i^k), $(i = 1, \ldots, m, k = 1, \ldots p_i)$ sånn at

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{q_i} \frac{A_i^k}{(x - a_i)^k} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{k=1}^{p_i} \frac{B_i^k \cdot x + C_i^k}{(x^2 + b_i \cdot x + c_i)^k} .$$

Randbemerkning 1.4. *(a) Det er ikke nødvendig å kunne forklare alt som foregår i dette teoremet! Viktig er bare at det er mulig å separere spesielle uttrykk fra $f(x)$ og hvordan dette fungerer er avhengig av faktoriseringen av $q(x)$.*

(b) Det gir ingen mening for integasjon å regne ut delbrøksoppspaltingrn hvis tellerpolynomet og nevnerpolynomet har en faktor til felles. Da kan man bare stryke denne faktoren.

(c) Hvis $q(x)$ faktoriseres som et tall ulik null ganger produktet, behandler vi dette tallet som en del av tellerpolynomet $p(x)$.

(d) Det er ikke så enkelt å bevise Teorem 1.5. Vanligvis bruker man en generalisert form av Euklids algoritmus for dette.

Vi har ikke ennå forklart hvordan man regner ut tallene A_i^k, B_i^k og C_i^k, men dette kan gjøres på samme måte som vi bestemte tallet A i Eksempel 1.6. Praktisk bruker man hele resultatet av Teorem 1.5 som ansats og bestemmer alle ukjente etter multiplikasjon. Her finnes det noen trikser som gjør det enklere. Noen av dem skal forklares i eksemplene nedenfor.

Eksempel 1.7. (a) **Oppgave:** Bruk resultatet fra Teorem 1.5 med funksjonen $f(x) = \frac{1}{x\cdot(x^2-1)}$

Løsningsforslag: Den tredje binomiske formelen gir $x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1)$ og så bare lineære faktorer og ansatsen

$$\frac{1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

(i) Vi kan nå slå alle summandene sammen på én brøkstrek som

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} &= \frac{A\cdot(x^2-1) + B\cdot x\cdot(x+1) + C\cdot x\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} \\ &= \frac{(A+B+C)\cdot x^2 + (B-C)\cdot x + (-A)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}.\end{aligned}$$

Dette gir tre ligninger $-A = 1$, $B - C = 0$, $A + B + C = 0$, som kan løses for

$$A = -1,\ B = C = \frac{1}{2}$$

(ii) Det er likevel mulig å bare multiplisere med én lineær faktor (innsettingsmetoden). Da kan vi avlese verdiene til parametrene.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)} &= A + \frac{B\cdot x}{x-1} + \frac{C\cdot x}{x+1} && x=0 && -1 = A \\ \frac{1}{x\cdot(x+1)} &= \frac{A\cdot(x-1)}{x} + B + \frac{C\cdot(x-1)}{x+1} && x=1 && \frac{1}{2} = B \\ \frac{1}{x\cdot(x-1)} &= \frac{A\cdot(x+1)}{x} + \frac{B\cdot(x+1)}{x-1} + C && x=-1 && \frac{1}{2} = C\end{aligned}$$

(iii) Det er også mulig å sette inn verdier for x som ikke ligner på rotene til $q(x)$. Det får man likevel et lineært system, for eksempel

$$\begin{aligned}&x=-2 && -\frac{1}{6} = \frac{1}{(-2)\cdot((-2)-1)\cdot((-2)+1)} = \frac{A}{-2} + \frac{B}{(-2)-1} + \frac{C}{(-2)+1} = -\frac{A}{2} - \frac{B}{3} - C \\ &x=2 && \frac{1}{6} = \frac{A}{2} + B + \frac{C}{3} \\ &x=\frac{1}{2} && -\frac{8}{3} = 2\cdot A - 2\cdot B + \frac{2\cdot C}{3}.\end{aligned}$$

Her finner vi (selvsagt) samme løsningen.

(b) **Oppgave:** Bestem delbrøkoppspaltingen til

$$f(x) = \frac{x^2 - 4\cdot x + 2}{(x^2+1)\cdot x^2}\,.$$

Løsningsforslag: Siden $x = 0$ er en dobbelrot vi har ansatsen

$$\frac{x^2 - 4\cdot x + 2}{(x^2+1)\cdot x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C\cdot x + D}{x^2+1}$$

Vi vil bruke insattsmetoden igjen, men får et problem her: Multiplikasjon med x og $x = 0$ gir uforklarter 0/0-uttrykk. Så multipliserer vi med x^2 i stedet og får

$$\frac{x^2 - 4\cdot x + 2}{x^2+1} = A\cdot x + B + \frac{C\cdot x^3 + D\cdot x^2}{x^2+1} \qquad\qquad x = 0: \qquad\qquad 2 = B\,.$$

Den første ligningen her kan vi *derivere* med hensyn til x. Det blir da

$$\frac{(2\cdot x - 4)\cdot(x^2+1) - (x^2 - 4\cdot x + 2)\cdot(2\cdot x)}{(x^2+1)^2} = A + 0 + x\cdot(...) \qquad x = 0: \qquad A = -4\,.$$

Nå gjenstår det bare C og D. Dem får vi slikt:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 4\cdot x + 2}{(x^2+1)\cdot x^2} = \frac{-4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{C\cdot x + D}{x^2+1} &= \frac{-4\cdot x\cdot(x^{”}+1) + 2\cdot(x^{”}+1) + x^2\cdot(C\cdot x + D)}{(x^2+1)\cdot x^2} \\
&= \frac{(-4 + C)\cdot x^3 + (2 + D)\cdot x^2 - 4x + 2}{(x^2+1)\cdot x^2} \\
-4 = C &\implies C = 4 \\
2 + D = 1 &\implies D = -1
\end{aligned}$$

Dermed er delbrøkoppspaltingen

$$f(x) = \frac{-4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4\cdot x - 1}{x^2+1}\,.$$

Praktisk fører delbrøksoppspaltning til at hver rasjonale funksjon kan skrives som en summe av seks forskjellige typer funsjoner.

Samling av reduserte rasjonale funksjoner

type	rasjonal integrand	antideriverte (uten integrasjonskonstant)
1	x^n (polynom)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (polynom også)
2	$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$
3	$\frac{1}{(x-a)^k}$	$\frac{1}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}$
4	$\frac{2\cdot(x-a)}{(x-a)^2+b^2}$	$\ln\lvert(x-a)^2+b^2\rvert$
5	$\frac{1}{(x-a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}\cdot\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$
6	$\frac{B\cdot x+C}{((x-a)^2+b^2)^k}$	kan løses med substitusjon og/eller delvis integrasjon

Her beskriver a, b, A og B reelle parametre og $k > 1$, n naturlige tall. De kvadratriske nevnerne har ikke samme form som før, men det er enklere å jobbe med dem sånn og alle kvadratiske polynomer uten reelle roter kan skrives som $(x-a)^2 + b^2$.[§]

[§]Litt dobbel-notasjon her, men jeg ville ikke innføre enda flere bokstaver.

Oppskrift: Integrasjon av rasjonale funksjoner

For å bestemme en antideriverte til $f(x) = \frac{p_1(x)}{q(x)}$ med to polynomer $p_1(x)$ og $q(x)$ kan bruke de følgende punktene.

Ingredienser: En rasjonal funksjon $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ (da p og q har ingen fektorer til felles), polynomdivisjon.
Slik gjør du:

1. Hvis tellergraden er større enn/lik nevnergraden: Bruk polynomdivisjon og reprenterer funksjonen som en summe av et polynom og en ekte rasjonale funksjon

$$f(x) = \tilde{p}(x) + f_1(x) \text{ med } f_1(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \text{ og } \deg p(x) < \deg q(x)\,.$$

2. Finn en maksimal faktorisering av nevneren som gitt i (1.4).

3a. For hver potens $(x-a)^k$ i $q(x)$, delbrøksutviklingen får en summand $\frac{A}{(x-a)^k}$,

3b. For hver potens $(x^2 + \bar{b}x + \bar{c})^k$ i $q(x)$, delbrøksutviklingen får en summand $\frac{B \cdot x + C}{(x^2 + \bar{b} \cdot x + \bar{c})^k}$ som kan likevel skrives som $\frac{B \cdot x + C}{(x-a)^2 + b^2}$

4. Bruk tabellen med de seks enkle typene for å integrere hver summand.

Eksempel 1.8. (a) **Oppgave:** Finn $\int \frac{x+1}{x+2} \mathrm{d}x$.

Løsningsforslag: Tellergraden er like stor som nevnergraden. Vi begynner med polynomdivisjon som gir

$$\int \frac{x+1}{x+2} \mathrm{d}x = \int 1 - \frac{1}{x+2} \mathrm{d}x = x - \ln|x+2| + \tilde{C}\,.$$

(b) **Oppgave:** Regn ut

$$\int_1^2 \frac{-8x^2 + 3x + 16}{x^3 + 2x^2 + 2x} \mathrm{d}x\,.$$

Løsningsforslag:

$$\frac{-8x^2 + 3x + 16}{x^3 + 2x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} = \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)x}{x^3 + 2x^2 + 2x}$$

Sammenlign like potenser i telleren

$$\begin{aligned} x^2 &: & A + B &= -8 & A &= 8 \\ x &: & 2A + C &= 3 & B &= -16 \\ x^0 &: & 2A &= 16 & C &= -13 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{-8x^2 + 3x + 16}{x^3 + 2x^2 + 2x} \mathrm{d}x = \underbrace{8 \cdot \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x}}_{=I_1} + \underbrace{-16 \cdot \int_1^2 \frac{x+1}{(x+1)^2 + 1} \mathrm{d}x}_{=I_2} + \underbrace{3 \cdot \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 + 1} \mathrm{d}x}_{=I_3}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= 8 \cdot [\ln x]_1^2 & &= 8 \cdot \ln 2\,, \\ I_2 &= -16 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \left[\ln|(x+1)^2 + 1|\right]_1^2 & &= 8 \ln 5 - 8 \underbrace{\ln 10}_{=\ln 5 + \ln 2}\,, \\ I_3 &= 3 \cdot [\arctan(x+1)]_1^2 & &= 3 \cdot \arctan 3 - 3 \cdot \arctan 2\,. \end{aligned}$$

Til sammen:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{-8x^2+3x+16}{x^3+2x^2+2x}\mathrm{d}x &= I_1+I_2+I_3\\ &= 8\cdot\ln 2+8\cdot\ln 5-8\cdot\ln 5-8\cdot\ln 2+3\cdot\arctan 3-3\cdot\arctan 2\\ &= 3\cdot\arctan 3-3\cdot\arctan 2\,.\end{aligned}$$

(c) **Oppgave:** Finn $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

Løsningsforslag: Med et kvadratisk uredusibelt polynom i kvadrat i nevneren, ansatsen er

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{A\cdot x+B}{x?2+1} + \frac{C\cdot x+D}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= (A\cdot x+B)\cdot(x^2+1)+C\cdot x+D\\ &= A\cdot x^3+B\cdot x^2+(A+C)\cdot x+(B+D)\\ \Rightarrow\ & A=0,\quad B=1,\quad C=1,\quad D=0\,.\end{aligned}$$

Så gjelder det

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x \qquad = \arctan x+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2\cdot x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x\\ &= \arctan x+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \qquad \text{med } u=x^2+1,\ \mathrm{d}x=\tfrac{\mathrm{d}u}{2\cdot x}\\ &= \arctan x-\frac{1}{2\cdot(x^2+1)}+\tilde{C}\,.\end{aligned}$$

Randbemerkning 1.5. *Med komplekse tall er delbrøkoppspaltning (på en måte) enkler fordi ingen (kompliserte) kvadratiske polynomer står i nevnerne. Det er likevel ikke tema her.*

Kapittel 2

Lineær Algebra

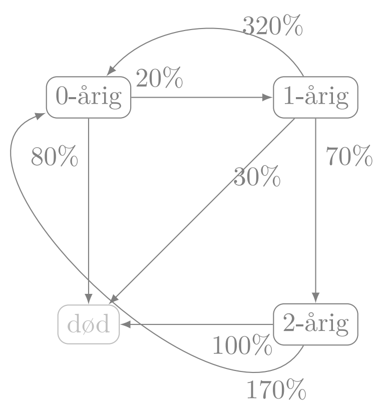
2.1 Introduksjon: Leslie-Modeller

For å motivere matriser og egenverdier - de to hovedinnholdene i dette kapittelet - begynner vi med en biologisk modell som kan brukes for å beskrive tidsutviklingen av populasjoner som er avhengige av alderstrinn for å vokse.

Eksempel 2.1 (Leslie-matriser, del 1)**.** Anta at en art av en plante lever bare 2 år. De reproduserer en gang i året og vi teller antall individer på hvert alderstrinn hvert år etter reproduksjon sesong. Reproduksjon skjer bare pga. hunkjønn og dermed tar vi hensyn til kun hunkjønn. Vi finner ut at 20% av de som er null år og 70% av de som er et år klarer å overleve til neste sesong. De som er to år, dør. 1-års og 2-årsgamle har en gjennomsnitt fruktbarhetsrate på 3.2 og 1.7.

Kan vi si noe om hvordan befolkningsvekst på arten vil se ut på sikt?

Modellen inneholder *overganger* fra en gruppe til en annen. La oss begynne med en grafik som beskriver det



Figur 2.1: Leslie modell, del 1

2.2 Lineære Likningssystemer

Eksempel 2.2 (Leslie-matriser, del 2)**.** - Finn en stabil befolkningsfordeling

2.3 Matriser

Hvis man vil bruke datamskiner for å løse lineære likningssystemer (kanskje med stor dimensjon) er det ueffisient å innføre nye variabler for hvert element x_i.

Definisjon 2.1 (Matrise)**.** En *matrise* (en (m, n)-matrise) er et *rektangulært sett* av *elementer* ordnet i *rader* og *kolonner* (dvs. av m rader og n kolonner). Elementene er vanligvis (reelle) tall, men kan også være mer generelle objekter.

Vi skriver matriser (her) som tabeller i runde parenteser:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}\,.$$

- vektorer kan sees på som matiser med bare én rade eller kolonne; tall kan sees som

2.3.1 Matriseoperasjoner

Eksempel 2.3 (Leslie-matriser, del 3)**.** Nå kjenner vi matrisenotasjonen og kan bruke den for å skrive

2.3.2 Determinanter

2.3.3 Lineær Uavhegngighet

2.4 Egenverdier og Egenvektorer

2.5 Linjer og plan i rommet

2.6 Anvendelser

Kapittel 3

Funksjoner av Flere Variabler

3.1 Introduksjon: Representasjon av Funksjoner

3.2 Grenseverdier og Kontinuitet

3.3 Partielle Deriverte

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,.
\end{aligned}
$$

3.4 Tangentplan, Lineær Approximasjon

3.5 Implisit Derivasjon, Retningsderivert, Gradient

3.5.1 Kjerneregelen for To-variabelt Funksjoner

Teorem 3.1. *Når $w = f(x,y)$, hvor x og y igjen er avhengig av t, slik at $x = g(t)$ og $y = h(t)$, deriveres w med hensyn til t ved*

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,,$$

hvor både w, x og y skal være differensierbare med hensyn til x og y eller t.

Kapittel 4

Differensialligninger

4.1 Introduksjon

4.1.1 Definisjoner og Notasjoner

Definisjon 4.1. (a) En ligning
$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$
kalles en (ordinær, førsteordens) *differensialligning.*

(b)

(c) *Ordenen* til en differensialligning angis den "høyeste" deriverte som forekommer av den ukjente funksjonen.

4.1.2 Retningsfelt

4.1.3 'Bare-tid' Differensialligninger

Pure-time differential equations

4.2 Separable Differensialligninger

Definisjon 4.2 (Separable Differensialligninger)**.** En (ordinær, førsteordens) differensialligning er én som kan skrives som
$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)\,.$$

4.3 Vekstmodeller

4.3.1 Eksponentiell Vekst

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y(t)$$

4.3.2 Begrenset Vekst

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot (M - y(t))\,, \quad (k > 0)$$

4.3.3 Logistisk Vekst, Verhulst-Modellen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y(t) \cdot (M - y(t)), \quad (k > 0)$$

4.4 Systemer av Differensialligninger

4.4.1 Eksempler

Lotka-Volterra Jeger-Bytte Modell

h... hare, r... rev

$$\begin{aligned} \tfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \alpha \cdot h(t) - \beta h(t) \cdot r(t), \\ \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \delta \cdot h(t) \cdot r(t) - \gamma \cdot r(t) \end{aligned}$$

SRI Smittemodellen

$$\begin{aligned} N &= S(t) + R(t) + I(t), \\ \tfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -b \cdot S(t) \cdot I(t), \\ \tfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= a \cdot I(t), \\ \tfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= b \cdot S(t) \cdot I(t) - a \cdot I(t), \end{aligned}$$

$a, b > 0$

4.4.2 Retningsfelt igjen

4.4.3 Lineære Systemer

Teorem 4.1. *Gitt* $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$*. Dersom* λ *er en egenverdi til* $\mathbf{A}$ *og* $\boldsymbol{u}$ *en tilhørende egenvektor, så er* $\mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \boldsymbol{u}$ *en løsning av differensialligningen.*

4.5 (Litt om) Likevekt og Stabilitet

Tillegg A

Fakta fra Videregående og/eller MA0001

A.1 Mengder

A.2 Kvadratrot

Kvadratrot er en funksjon definert som én inversfunksjon til kvadraten:

$$\sqrt{a} = b \iff b^2 = a \text{ og } b \geq 0\,.$$

Dvs. at $\sqrt{4} = 2$ (og **ikke** -2).

A.3 Exponensialfunksjon

A.3.1 Logaritmus

Logartimus er en funksjon definert som én inversfunksjon til eksponensialfunkjonen:

A.3.2 Regneregler for Eksponenter og Logaritmer

La $a, b > 0$ og $x, y \in \mathbb{R}$. Da er

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
-

A.4 Trigonometriske Funksjoner

A.5 Polynomer og Polynomdivisjon

A.6 Grenseverdier og Kontinuitet

A.7 Derivasjonsregler og spesielle Deriverte

.

Den *deriverte* av en funksjon er igjen en funksjon og den beskriver stigningstallet av tangenten til den oprinnellige funksjonen. Gitt et tall $x \in (a, b)$. Anta at den følgende grenseverdien eksisterer:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x^* \to x} \frac{f(x^*) - f(x)}{x^* - x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x^*)}{\mathrm{d}x^*}\Big|_{x^*=x}$$

Så kaller vi den *deriverte til f i x*.

A.8 Integrasjon

Integrasjon betegner prosessen da man regner ut arealet under en kurve. Anta at $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon

$$\int \alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f_1(x)\mathrm{d}x + \beta \cdot \int f_2(x)\mathrm{d}x$$

Tillegg B

Antideriverte av Spesielle Funksjoner

$$\int 1\mathrm{d}x = x + C$$
$$\int x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C\,, \quad (a \neq 0)$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C\,,$$
$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C\,,$$
$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)\,,$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C\,,$$
$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C\,,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C\,,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C\,,$$

Tillegg C

Komplekse Tall

Definisjon C.1. Et *kompleks tall* z er et objekt på formen

$$z = x + \mathrm{i} \cdot y\,,$$

der x og y er reelle tall og kalles henholdsvis *realdelen* $\Re z$ og *imaginærdelen* $\Im z$ til det komplekse tall. Symbolet i kalles *den imaginære enhet*. Sentralt i teorien av komplekse tall er identiteten

$$\mathrm{i}^2 = -1\,.$$

Register