Oppgave 1 Velg for enhvert poeng nedenfor hvilke utsagn som er riktige og hvilke som ikke er det. Du får bare poeng i hvert avsnitt hvis alle besvarelsene er riktige.

Tips: Det er alltid minst ett utsagn riktig og minst ett feil.

1. Vi ser på en matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ med en egenvektor $\boldsymbol{v}$ og en tilsvarende egenverdi λ. Da gjelder det nødvendigvis:

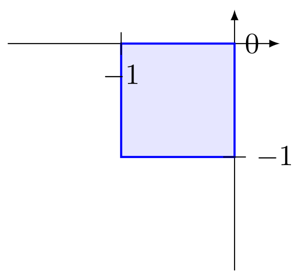
   (a) λ er en rot av $\mathbf{A}$ sitt karakteristisk polynom.

   (b) $(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

   (c) Under avbildningen $\boldsymbol{u} \mapsto \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{u}$ avbildes $\boldsymbol{v}$ til nullvektoren $\mathbf{0}$.

   (d) $\boldsymbol{v}^\top \cdot \mathbf{A}^\top = \lambda \cdot \boldsymbol{v}^\top$.

2. Nedenfor er det et geometrisk objekt (i blått) som er bildet av enhetskvadraten (dvs. kvadraten med hjørnene $\{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\}$) under avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$ for en matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$



   Det gjelder

   (a) $\mathbf{A}$ kan være enhetsmatrisen $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) $\mathbf{A}$ kan være den negative enhetsmatrisen $-\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

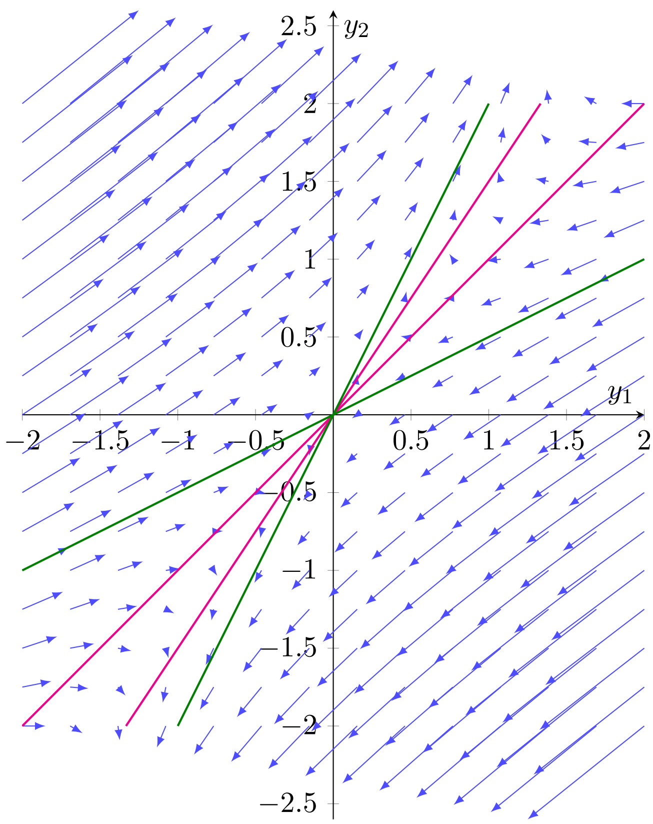
   (c) $\mathbf{A}$ må være den negative enhetsmatrisen $-\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (d) $\mathbf{A}$ kan være en rotasjonsmatrise.

3. Nedenfor er det retningsfeltet (blå) til det lineære differensialligningssystemet

$$y_1'(x) = -\tfrac{3}{2} \cdot y_1(x) + y_2(x)\,,$$
$$y_2'(x) = -y_1(x) + y_2(x)\,,$$

   med null-ikoklinene og egenvektor-retningene til systemets Jacobimatrise/systemmatrise.



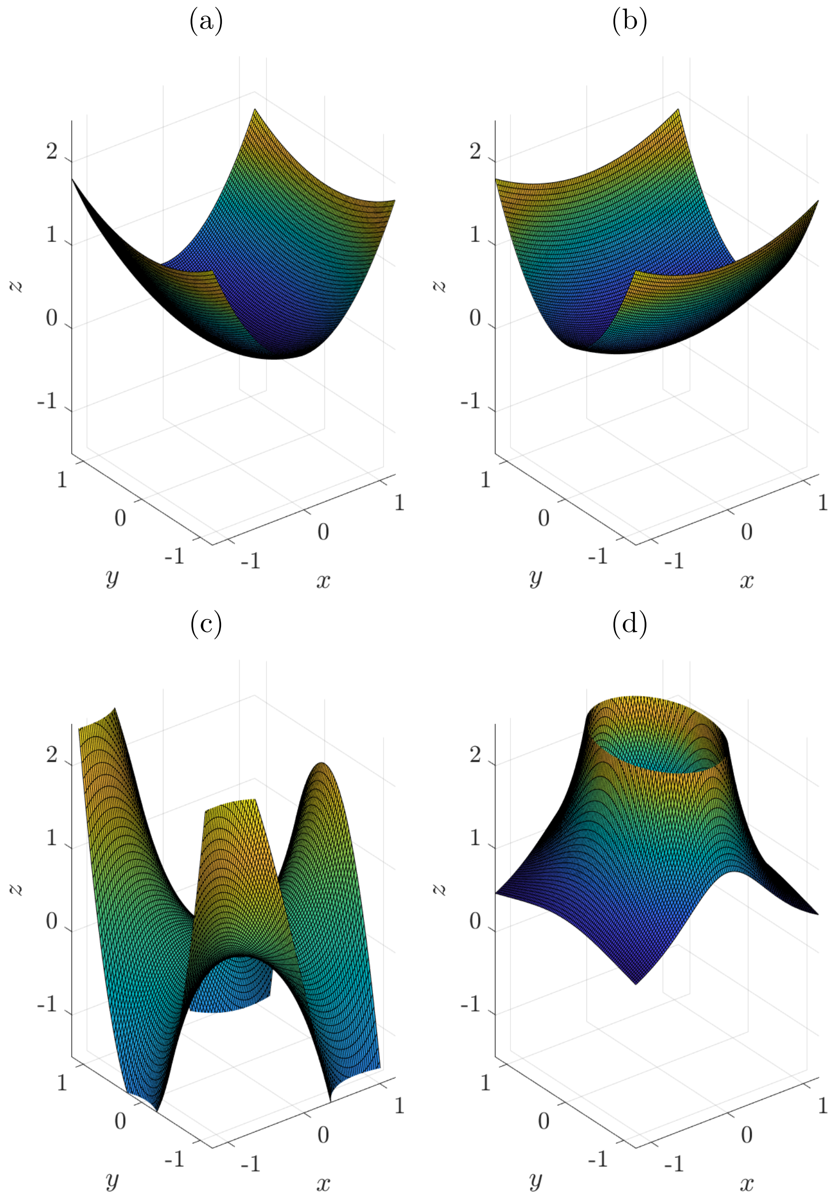
(a) Alle egenverdiene til $\mathbf{A}$ er positive.

(b) Differensialligningssystemet har bare én likevekt i $(y_1, y_2) = (0, 0)$.

(c) Alle likevekteren til systemet er stabile.

(d) De magenta linjene tilsvarer isoklinene; de grønne linjene viser egenvektorenes retningene.

4. Nedenfor er det illustrasjoner (surface plots) til fire funksjoner med argumenter x og y i $\mathbb{R}^2$ og bildet i $\mathbb{R}$. Avgjør tilhørigheten til de fire algebraiske uttrykk for funksjoner under skissene.



$$f(x,y) = (x^2 + \tfrac{1}{2}\cdot y^2)^{-1}\,, \qquad g(x,y) = \tfrac{1}{4}\cdot x^2 + y^2\,,$$
$$h(x,y) = x^2 + \tfrac{1}{4}\cdot y^2\,, \qquad k(x,y) = x^3 - 3\cdot x\cdot y^2\,,$$

(a) Tilordningene er $h \leftrightarrow$ (a), $k \leftrightarrow$ (b), $g \leftrightarrow$ (c), $f \leftrightarrow$ (d).
(b) Tilordningene er $h \leftrightarrow$ (a), $g \leftrightarrow$ (b), $f \leftrightarrow$ (c), $k \leftrightarrow$ (d).
(c) Tilordningene er $g \leftrightarrow$ (a), $h \leftrightarrow$ (b), $k \leftrightarrow$ (c), $f \leftrightarrow$ (d).
(d) Tilordningene er $h \leftrightarrow$ (a), $g \leftrightarrow$ (b), $k \leftrightarrow$ (c), $f \leftrightarrow$ (d).

Retteveiledning

1. (a), (b), (d) er riktige. $\boldsymbol{v}$ avbildes til $\lambda \cdot \boldsymbol{v}$. Hvis ikke $\lambda = 0$, er dette ikke nullvektoren.
2. (b) og (d) er riktige.

   (a) kan ikke stemme siden bildet viser ikke det opprinnelige objektet; (c) er ikke riktig, fordi $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ er også mulig.
3. (b) og (d) er riktige. Bare en egenverdi er positiv. Dermed kan likevekten ikke være stabil.
4. (d) er riktig.

△

Oppgaven teller ? poeng.

Oppgave 2 Vi ser på en populasjon (som vanlig: bare hunkjønn) av haier som ikke kan få barn når de er eldre enn 15 eller yngre enn 5 år. Hvis de er eldre enn 5 år (og yngre enn 15 år), så får de gjennomsnittig 50 barn i en 5-års tidsperiode. Haiene er på toppen av næringskjeden og i et beskyttet område. Man kan dermed antar at voksne (over 5 årige) ikke dør før de er 15 år gamle.

1. Sett opp en Leslie-modell som beskriver haienes populasjonsutvikling. Det mangler informasjon. Bruk en variabel $\alpha \in \mathbb{R}$, der det er nødvendig.
2. Antar at ved tiden $t = 0$, det er 300 under-fem årige haier. Etter 5 år er det 3 haier som er mellom 5 og 10 år gamle, 700 under-fem årige haier og 707 haier til sammen.

   Bruk denne informasjonen for å finne verdien til variablen α.

   Hvor mange over-fem årige haier har det vært i begynnelsen? Hvor mange av dem var eldre enn 10 år?
3. Beskriv (og begrunne matematisk) hva som skjer med denne populasjonen og dens fordelingen i det lange løp.

   Tips: Leslie matrisen har bare én (reell) egenverdi og den er et naturlig tall og også den dominerende egenverdien.
4. Hva skjer med populasjonen (i det lange løp), hvis fødselsraten til over 10-årige minker til å være bare 10 avkomst i en fem-års periode? Du trenger ikke regne ut egenskaper av den nye modellen, men beskriv forventningene dine om disse.

Retteveiledning

1. En mulighet å sette opp Leslie modellen er å bruke tre grupper:
   (a) null-til-fem år gamle,
   (b) fem-til-ti år gamle,
   (c) ti-til-femten år gamle haier.

   Haier eldre enn femten er ikke relevant. Leslie-matrisen blir $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 50 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ med en ukjent overlevelsesrate α.

2. Vi vet at den første komponenten av inisialpopulasjonen $\boldsymbol{p}_0$ er 300. Multiplikasjon med $\mathbf{L}$ og å bruke informasjonen om $\boldsymbol{p}_1$ gir oss videre

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 50 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ ?_1 \\ ?_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 700 \\ 3 \\ 707 - 700 - 3 = 4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}_1 \,.$$

   Den andre raden $300 \cdot \alpha = 3$ gir $\alpha = \frac{1}{100}$. Den første raden $0 + 50 \cdot (?_1 + ?_2) = 700$ forteller oss $?_1 + ?_2 = 14$, så det er antall over-fem årige i begynnelsen. Den siste raden gir endelig $1 \cdot ?_1 + 0 \cdot ?_2 = 4$, dvs. $?_1 = 4$ og så $?_2 = (?_1 + ?_2) - ?_1 = 14 - 4 = 10$ og det er antall over ti-årige haier.

3. Med $\alpha = \frac{1}{100}$, er Leslie matrisen

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 50 \\ \frac{1}{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

   Dens karakteristisk polynom er

$$\det(L - \lambda \cdot I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 50 & 50 \\ \frac{1}{100} & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 50 \cdot \frac{1}{100} - (-\lambda) \cdot 50 \cdot \frac{1}{100} = -\lambda^3 + \lambda/2 + 1/2$$

   med en egenverdi $\lambda_1 = 1$ (siden $-1^3 + 1/2 \cdot 1 + 1/2 = 0$).
   En tilhørende egenvektor kan finnes ved å løse det homogenske systemet

$$\begin{pmatrix} -1 & 50 & 50 \\ \frac{1}{100} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

   $100 \cdot (\mathrm{R2}) + (\mathrm{R1}) \to (\mathrm{R2})$ i den utvidete matrisen gir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 50 & 50 & 0 \\ 0 & -50 & 50 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) ,$$

   slik at den frie variablen v_3 kan brukes til å få $v_2 = v_1$ og $v_3 = 50 \cdot (v_2 + v_3)$. MEd valget $v_3 = 1$ får vi en egenvektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

I det lange løp kan vi dermed forvente, at populasjonen går mot (et multiplum av) $\boldsymbol{v}_1$. Totalt vil den verken vokse eller minke, siden den dominerende egenverdien $\lambda = 1$ viser på en «konstant vekst».

4. Hvis fødselraten blir mindre, forventer vi at ikke like mange barn blir født og dermed at populasjonen mioker i der lange løp. Mhp. egenverdiene forventer vi at $\lambda < 1$ er en dominerende egenverdi.

   Man kan regne egenverdiene ut (f. eks. med WolframAlpha/GeoGebra)

$$\lambda_1 \approx 0.7914254764, \lambda_2 \approx -0.5695928304, \lambda_3 \approx -0.2218326461.$$

△

Oppgaven teller ? poeng.

Oppgave 3 Vi ser på en fabrikk som produserer brunost (Mengde betegnet med $O(t)$, målt i ton og avhengig av tida t målt i døgn) hvorav vi vet at:

- tidsutviklingen av $O(t)$ kan godt beskrives med en von-Bertalanffy-modell,
- den indre vekstraten er $\frac{1}{10}$.
- Etter $t = 10$ døgn tas den ferdige osten ut av beholderne.

Maskinene i fabrikken er instillt slik at en beholder blir påfyllt med $B_0 = 25$ ton tørt råmaterialer og andre materialene blir tillagt sånn at (teoretisk, kunne man vente så lenge) det kunne produsere $K_0 = 100$ ton ost.

Eksperimenter i laboret har vist at det er mulig å forandre innfyllingsmengden B_0 og beholderkapasiteten K_0 litt, men det koster mer penger når man skifter prosessen. Faktisk er det sånn at kostnadene stiger kvadratisk med differensen til nominalverdiene, dvs.

$$\text{å bruke } B \in \mathbb{R} \text{ som påfyllmengden koster } 10 \cdot (B - B_0)^2 \text{ kroner til, ,}$$
$$\text{å bruke } K \in \mathbb{R} \text{ som kapasiteten koster } 10 \cdot (K - K_0)^2 \text{ kroner til.}$$

Hver ton brunost kan selges for tre hundre kroner.

1. Set opp et initialverdiproblem som beskriver produksjonen. Hva er løsningen? (Du trenger ikke vise fram regningen)

2. Hvilke verdier for kapasiteten og påfyllmengden burde brukes sånn at inntektene til fabrikken maksimeres?

Retteveiledning

1. Vi har en von-Bertalanffy ligning som beskriver ostsmengden; indre vekstrate ble gitt; bæreevnee tilsvarer kapasiteten og initialbetingelse beskrives med påfylmmengden. Alt sammen altså:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}O(t) = \frac{1}{10} \cdot (K_0 - O(t))$$
$$O(0) = B_0 .$$

Løsningen (se forelesning) er

$$O(t) = K_0 + \mathrm{e}^{-t/10} \cdot (B_0 - K_0) = 100 - 75 \cdot \mathrm{e}^{-t/10} .$$

2. Inntektene til fabrikken er pengene de fortjener (dvs. de får for osten) minus (ekstra-) kostnadene. Vi får dermed et optimeringsproblem (avhengig av påfylmmengden B og kapasiteten K):

$$\begin{aligned}&\max_{B,K} 300 \cdot O(10) - 10 \cdot (K - K_0)^2 - 10 \cdot (B - B_0)^2 \\ &\quad = \max_{B,K} 300 \cdot (K + (B - K) \cdot \mathrm{e}^{-1}) - 10 \cdot (K - 100)^2 - 10 \cdot (B - 25)^2 =: \max_{B,K} f(B, K) .\end{aligned}$$

Faktisk trenger vi $B > 0$ og $K > 0$, men det er ikke viktig her. Kritiske punkt kan vi finne ved å sette gradienten til null:

$$\nabla f(B, K) = \begin{pmatrix} \partial_B f(B, K) \\ \partial_K f(B, K) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \cdot \mathrm{e}^{-1} - 20 \cdot (B - 25) \\ 300 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-1}) - 20 \cdot (K - 100) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

med løsningene $B = 25 + 15 \cdot \mathrm{e}^{-1} \approx 30.518$ (ton) og $K = 100 + 15 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-1}) \approx 109.482$ (ton).

Det er ikke (helt) nødvendig å analysere Hessematrisenes egenverdier (de er -20) når man ser på funksjonen f: Den er kvadratisk i K og B med negativ koeffisient foran $()^2$. Dermed må alle kritiske punkt være maksima.

△

Oppgaven teller ? poeng.

Oppgave 4 I forelesningen innførte vi Gauss-algoritmen for å løse (kvadratiske) lineære systemer

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} , \quad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} , \ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n , \ n \geq 1)$$

Idéen bak denne algoritmen er å bruke *elementære radeoperasjoner* for å overføre systemet til et som er i trappeform og dermed enklere å løse.

Beskriv med egne ord hvordan Gauss-algoritmen fungerer. (Helt til løsningsmengden av alle $\boldsymbol{x}$ er bestemt) Beskrivelsen må

- inneholde hva slags radeoperasjoner vi kjenner og hvorfor de ikke forandrer løsningsmengden,

- inneholde en forklaring om hvordan «nuller» produseres i matrisen og når dette ikke fungerer (det anbefales et eksempel),
- bruke ordene «ikke-løselig» (**Jeg ble fortalt at «løsbar» er ikke vanlig å si.**), «utvidet matrise», «baklengs substitusjon», «fri variabel», «éntydig».

Retteveiledning **Viktige poeng her:**

- Før Gauss-algoritmen begynner, blir matrisen $\mathbf{A}$ og vektoren $\boldsymbol{b}$ slååt sammen til den utvidete matrisen $(\mathbf{A}|\boldsymbol{b})$; på den utføres radeoperasjonene.
- Vi snakket om tre lementære radeoperasjoner: Multiplisere en rade med et tall som ikke er null, erstatte en rade med summen av den og et multipllum av en annen rade, bytte to rader.
- Når elementære radeoperasjoner brukes på den utvidete matrisen, betyr det at vi skalerer, adderere og/eller bytter ligninger. De er dermed bare en omskriving av kjente ligninger og forandrer (felles) betydning (ergo: løsningsmengden) ikke.
- Overføring til trappeformen: Vi bruker elementære radeoperasjoner for å «skape nuller» først i den første kolonnen (alle untatt første rade), så i den andre (alle untatt første to rader) osv.
- Dette kan gjøres så langt som minst en rade over den der vi «trenger en null» har en et ikke-null-element i samme kolonnen og så langt som vi har nok ikke-null-elementer for hoveddiagonalen.

  Når fungerer det ikke? Se på systemet

  $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

  Det er klart at løsningsmengden er $\{\boldsymbol{x} = (C, 2)^\top, C \in \mathbb{R}\}$, men overføring til trappeform fungerer ikke, siden det står «for mange nuller» i den første kolonnen allerede. (Praktisk trenger vi har en ny sortering av vektoren $\boldsymbol{x}$ først.)

  Informasjon: Dette snakket vi ikke (fulstendig) om i forelesningen. Dette ville ikke ble spurt om i eksamenen. (Hele oppgaven er for lang til å ble spurt om i eksamenen.)
- Etter overføring til trappeform bruker vi baklengs substitusjon for å finne hele løsningsmengden.
- Her kommer det an på hvor mange løsninger det finnes: I en situasjon med «perfekt trappeform» (dvs. alle nuller kunne produseres og hoveddiagonalen består av bare ikke-null-elementer) har vi en entydig løsning. I tilfelle av «for mange nuller» (dvs. en stor null-blokk på bunnen av $\mathbf{A}$-delen) må vi se på $\boldsymbol{b}$-delen: Har den ikke-null elementer som treffer til bare nuller (i samme radene), er systemet ikke-løselig, i andre fall må man innføre frie variabler som kan tar hvilke som helst reelle verdier.

△

Av de neste oppgavene, velg *nøyaktig én* som du leverer.

Oppgave 5 I forelesningen viste vi at tangentplanet T til en (kontinuerlig deriverbar) funksjon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i et punkt $(x, y) = (a, b)$ kunne beskrives som

$$T = \left\{(x, y, z) : z - f(a, b) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x} \cdot (x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y} \cdot (y - b)\right\} . \qquad (*)$$

For å gjøre dette brukte vi Taylors teorem og representerte T som en lineær funksjon av x og y.

Oppgaven her er å bruke en annen fremgangsmåte for å vise identiteten. Du kan velge selv om du vil starte med

- Beskrivelsen av T i parameterform

  $$T = \{\boldsymbol{v} : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 + s \cdot \boldsymbol{v}_2 \,,\ t, s \in \mathbb{R}\}$$

  med $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}$, eller

- Beskrivelsen av T via dens normalenvektor $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$, altså

  $$T = \left\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 : (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})^\top \cdot \boldsymbol{n} = 0\right\}$$

Det anbefales å bruke de geometrike betydningene av vektorene $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}$ og at disse må stå rettvinkelig og/eller parallelt på vektorer som beskriver grafen til f approksimativt.

Du må i alle fall (i) identifisere alle størrelser i T sin beskrivelse du valgte og (ii) komme til samme resultatet som i (*).

Retteveiledning Parameterformen: v_1 og v_2 kan velges parallelle til koordinataksene, f. eks.

$$\boldsymbol{v}_1 = (0, 1, \partial_y f(a, b))^\top , \quad \boldsymbol{v}_2 = (1, 0, \partial_x f(a, b))$$

Normalformen: Vi må finne en vektor $\boldsymbol{n}$ som står perpendikulær på de to vektorene $\boldsymbol{v}_1$ oog $\boldsymbol{v}_2$ overfor. Vi kan velge, f.eks.

$$\boldsymbol{n} = (\partial_x f(a, b), \partial_y f(a, b), -1)^\top .$$

Som $\boldsymbol{v}_0$ og $\boldsymbol{w}$ kan man velge $(a, b, f(a, b))^\top$.

Vis ekvivalens: Hvis parameterformen blir brukt, får man

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a, b) \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix}$$

Disse verdiene for x, y, og z kan settes inn i den opprinnelige representasjonen av T: Venstre side:

$$z - f(a,b) = (f(a,b) + t \cdot \partial_y f + s \cdot \partial_x f) - f(a,b) = t \cdot \partial_y f + s \cdot \partial_x f$$

Nå den høyre sida:

$$\partial_x f \cdot (x-a) + \partial_y f \cdot (y-b) = \partial_x f \cdot ((a+s)-a) + \partial_y f \cdot ((b+t)-b) = t \cdot \partial_y f + s \cdot \partial_x f$$

Siden de er like, ligger alle punkt i parameterformen i planet beskrevet med formen frs forelesningen.

Hvis normalenform ble brukt, omskriver vi

$$0 = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})^\top \cdot \boldsymbol{n} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} \right)^\top \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ -1 \end{pmatrix} = (x-a) \cdot \partial_x f + (y-b) \cdot \partial_y f - (z - f(a,b))$$

og får igjen samme resultatet som i forelesningen. △

Oppgave 6 Se på differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= 2 \cdot y_1 \cdot y_2 - y_2^2 \\ y_2'(x) &= \frac{y_1}{2+y_2} - y_2 \,. \end{aligned}$$

1. Bestem (algebraisk) alle null-isoklinene og alle likevektsløsningene til systemet.
2. Skissér null-isoklinene til systemet i et koordinatsystem slik at alle likevektsløsningene kan synes.
3. For enhver likevekt, bestem systemets Jacobimatrise (kalle det $\mathbf{J}$) og avgjør (hvis mulig) om likevektene er stabile eller ikke.

Retteveiledning

1. Null-isoklinene er kurvene, da (minst) én komponente av den høyre sida er null: $y_1' = 0$:

   $$2y_1y_2 - y_2^2 = 0 \;\Rightarrow\; y_2 = 0 \text{ eller } (y_2 = 2y_1)$$

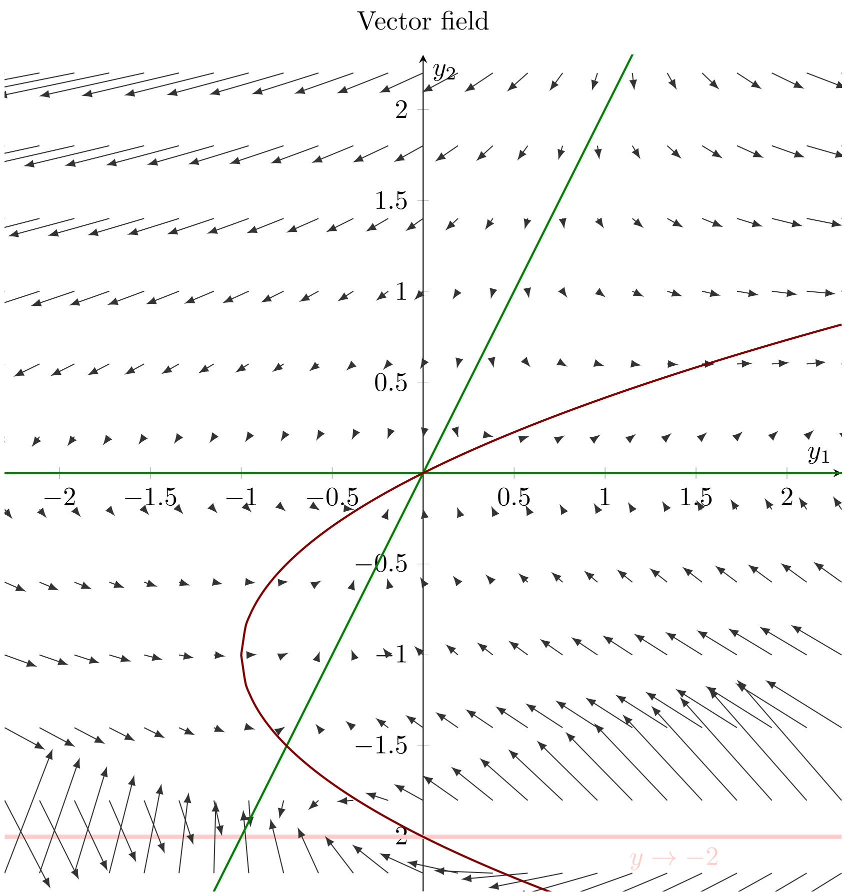
   $y_2' = 0$:

   $$\frac{y_1}{2+y_2} - y_2 = 0 \;\Rightarrow\; y_2 = -1 \pm \sqrt{1+y_1}$$

   Likevekter er hvor isoklinene skjæres. Det finnes to punkt:

   $$\boldsymbol{y}^{(1)} = (0,0)^\top \,, \qquad \boldsymbol{y}^{(2)} = (-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{3}{2})^\top \,.$$

2. Vi tegner retningsfelt også (ikke nødvendig her)



For $y_2 \to -2$, går y_2-komponenten til den høyre sida mot $\pm\infty$. Her er retningsfeltet ikke velforklart.

3. Jacobi matrisen er

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^*) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}}\Big|_{\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^*} = \begin{pmatrix} 2y_2 & 2y_1 - 2y_2 \\ \frac{1}{2+y_2} & -1 - \frac{y_1}{(2+y_2)^2} \end{pmatrix}$$

Man får så:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^{(1)}) = \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2}(\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^{(1)})) = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{37})$$

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2}(\mathbf{J}(\boldsymbol{y}^{(2)})) = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Likevekten $\boldsymbol{y}^{(1)}$ er ustabil siden en egenverdi er positiv.
For $\boldsymbol{y}^{(2)}$ kan vi ikke si noe ved å bare se på Jacobimatrisen.

Det var et trykkfeil i den opprinnelige versionen Løsningen i tilfelle

$$y_1'(x) = 2 \cdot y_1 \cdot y_2 - y_2^2$$
$$y_2'(x) = \frac{y_1}{2+y_1} - y_2\,.$$

er:

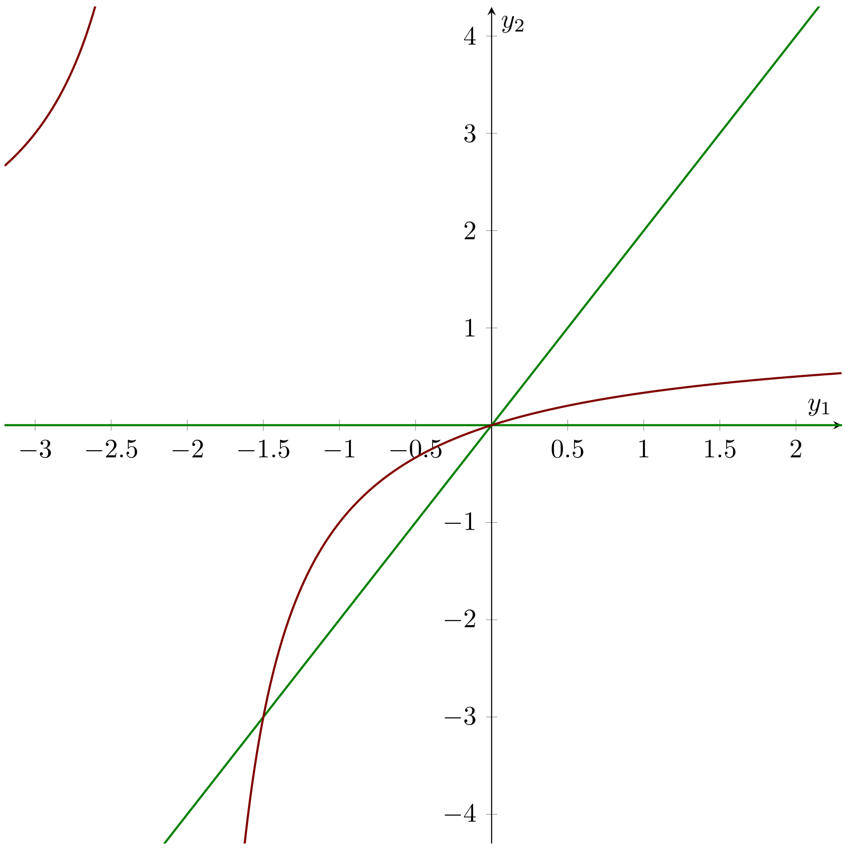
1. Isokliner:

$$y_2 = 0 \text{ eller } y_2 = 2 \cdot y_1 \quad \text{og } y_2 = \frac{y_1}{2 + y_1}$$

   Likevekter: $\boldsymbol{y}^{(1)} = (0,0)^\top$, $\boldsymbol{y}^{(2)} = (-3/2, -3)^\top$

2. Skisse:

Vector field



3. Jacobimatrise i $\boldsymbol{y}^{(1)}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$$

   Jacobimatrise i $\boldsymbol{y}^{(2)}$:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \implies \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -9$$

   Om den førstes stabilitet kan vi ikke si noe fra $\mathbf{J}$; $\boldsymbol{y}^{(2)}$ er ustabil. Faktisk er begge to ustabile; se diskusjonen på mattelab for det.

△