NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0002 Brukerkurs Matematikk B**

Retteveiledning

Faglig kontakt under eksamen: Santa Claus

Tlf: 0047-HO-HO-HO

Eksamensdato: mai/jun. 2022

Eksamenstid (fra–til): 00:00–24:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A / Alle hjelpemidler tillatt

Annen informasjon:
Teknisk hjelp under eksamen: NTNU Orakel Tlf: 73 59 16 00

Får du tekniske problemer underveis i eksamen, må du ta kontakt for teknisk hjelp snarest mulig, og senest innen eksamenstida løper ut/prøven stenger. Kommer du ikke gjennom umiddelbart, hold linja til du får svar.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 11

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Ikke ha Inspera åpen i flere faner, eller vær pålogget på flere enheter, samtidig, da dette kan medføre feil med lagring/levering av besvarelsen din.

Skaff deg overblikk over oppgavesettet før du begynner på besvarelsen din.

Les oppgavene nøye, gjør dine egne antagelser og presiser i besvarelsen hvilke forutsetninger du har lagt til grunn i tolkning/avgrensing av oppgaven. Faglig kontaktperson kan kontaktes dersom du mener det er feil eller mangler i oppgavesettet.

Juks/plagiat: Eksamen skal være et individuelt, selvstendig arbeid. Det er tillatt å bruke hjelpemidler, men vær obs på at du må følge eventuelle anvisningen om kildehenvisninger under. Under eksamen er det ikke tillatt å kommunisere med andre personer om oppgaven eller å distribuere utkast til svar. Slik kommunikasjon er å anse som juks. Alle besvarelser blir kontrollert for plagiat. Du kan lese mer om juks og plagiering på eksamen her.

Kildehenvisninger: Det anbefales å referensere ≪fakta fra forelesningen≫ med hensyn på

- Læreboka: ≪Chapter X.Y, Example Z≫ eller ≪Chapter X.Y, Boks med navn Z≫
- Forelesningspresentasjoner: ≪Forelesning fra 2022.MM.DD.: Slide X i pdf fil≫
- GeoGebraArket: ≪Eksempel X≫
- Gamle eksamener: ≪Eksamen høst XX, oppgave Y, løsningsforslag, side ZZ i pdf≫
- Andre kilder: Vær så nøyaktig som mulig. Kilden må være éntydig til oss.

Varslinger: Hvis det oppstår behov for å gi beskjeder til kandidatene underveis i eksamen (f.eks. ved feil i oppgavesettet), vil dette bli gjort via varslinger i Inspera. Et varsel vil dukke opp som en dialogboks på skjermen i Inspera. Du kan finne igjen varselet ved å klikke på bjella øverst i høyre hjørne på skjermen. Det vil i tillegg bli sendt SMS til alle kandidater for å sikre at ingen går glipp av viktig informasjon. Ha mobiltelefonen din tilgjengelig.

Vekting av oppgavene: Legg merke til vektingsinformasjon på toppen av hver oppgave.

BESVARE OG LEVERE

Besvare i Inspera: Hvis oppgavesettet inneholder oppgaver som ikke er av typen filopplasting, skal de besvares direkte i Inspera. I Inspera lagres svarene dine automatisk hvert 15. sekund.

NB! Klipp og lim fra andre programmer frarådes, da dette kan medføre at formatering og elementer (bilder, tabeller etc.) vil kunne gå tapt.

Filopplasting: Når du jobber i andre programmer fordi hele eller deler av besvarelsen din skal leveres som filvedlegg – husk å lagre besvarelsen din med jevne mellomrom.

Merk at alle filer må være lastet opp i besvarelsen før eksamenstida går ut.

Det framgår av filopplastingsoppgaven(e) hvilke(t) filformat som er tillatt. Merk at det kun er mulig å laste opp én fil per filopplastingsoppgave.

Det er lagt til **30 minutter** til ordinær eksamenstid for eventuell digitalisering av håndtegninger og opplasting av filer. Tilleggstida er forbeholdt innlevering og inngår i gjenstående eksamenstid som vises øverst til venstre på skjermen.

NB! Det er ditt eget ansvar å påse at du laster opp riktig(e) og intakt(e) fil(er). Kontroller filene du har lastet opp ved å klikke "Last ned" når du står i filopplastingsoppgaven. Alle filer kan fjernes og byttes ut så lenge prøven er åpen.

Slik digitaliserer du eventuelle håndtegninger

Slik lagrer du dokumentet ditt som PDF

Slik fjerner du forfatterinformasjon fra filen(e) du skal levere

Automatisk innlevering: Besvarelsen din leveres automatisk når eksamenstida er ute og prøven stenger, forutsatt at minst én oppgave er besvart. Dette skjer selv om du ikke har klikket ≪Lever og gå tilbake til Dashboard≫ på siste side i oppgavesettet. Du kan gjenåpne og redigere besvarelsen din så lenge prøven er åpen. Dersom ingen oppgaver er besvart ved prøveslutt, blir ikke besvarelsen din levert. Dette vil anses som "ikke møtt" til eksamen.

Trekk/avbrutt eksamen: Blir du syk under eksamen, eller av andre grunner ønsker å levere blankt/avbryte eksamen, gå til "hamburgermenyen" i øvre høyre hjørne og velg ≪Lever blankt≫. Dette kan ikke angres selv om prøven fremdeles er åpen.

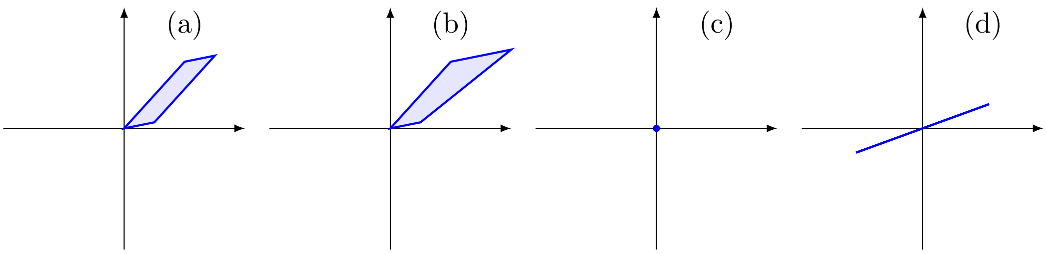
Tilgang til besvarelse: Du finner besvarelsen din i Arkiv etter at sluttida for eksamen er passert.

Oppgave 1 Velg for enhvert poeng nedenfor hvilke utsagn som er riktige og hvilke som ikke er det. Du får bare poeng i hvert avsnitt hvis alle besvarelsene er riktige.

Tips: Det er alltid minst ett utsagn riktig og minst ett feil.

1. En matrise $\mathbf{A}$ er inverterbar (som definert i forelesningen). Da gjelder det nødvendigvis:
   (a) $\mathbf{A}$ er kvadratisk
   (b) $\det(\mathbf{A}) = 0$
   (c) For hver vektor $\boldsymbol{b}$ som har like mange komponenter som $\mathbf{A}$ har rader, kan man finne en vektor $\boldsymbol{x}$ slik at $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
   (d) For to forskjellige vektorer $\boldsymbol{x}_1$ og $\boldsymbol{x}_2$ (med riktig dimensjon) er også vektorene $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}_1$ og $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}_2$ forskjellige.

2. Nedenfor er det fire geometriske objekter (i blått). Avgjør hvilke av dem som kan være bilder av kvadraten med hjørnene $\{(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)\}$ under avbildningen $\boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$ for en matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$



3. Her handler det om integrasjonsteknikker for å bestemme antideriverte til reellverdige funksjoner, dvs. oppgaven er å finne $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ slik at $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$ for $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ og $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) $F(x) = \cos^2(x)$ er en antideriverte til $f(x) = -2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$.
   (b) $F(x) = -\sin^2(x)$ er en antideriverte til $f(x) = -2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x)$.
   (c) Hvis f er en rasjonal funksjon og man kjenner alle roter til nevnerpolynomet, kan man bestemme F på en analytisk måte.
   (d) Hvis f er en sammensatt funksjon av to integrerbare funksjoner kan man alltid bruke substitusjonsmetoden for å få et analytisk uttrykk for F.

4. I denne oppgaven handler det om (systemer av) differensialligninger.
   (a) Hver skalar, eksplisit, autonom andreordens differensialligning $y''(x) = f(y(x), y'(x))$ kan omskrives til første orden idet man innfører en ny variable $z(x) = y'(x)$ slik at man får $z'(x) = f(y(x), z(x))$.

(b) Hver skalar, eksplisit, andreordens differensialligning $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ kan omskrives til første orden idet man innfører en ny variable $z(x)$ med $z'(x) = y(x)$ slik at man får $y'(x) = f(x, y(x), z(x))$.

(c) Hver eksplisit, skalar autonom førsteordens differensialligning er også separabel.

(d) Hvis inisialverdien $y(x_0) = y_0$ til en autonom differensialligning $y'(x) = f(y(x))$ er veldig nært til en likevekt, forblir løsningen $y(x)$ nært denne likevekten for alle $x > x_0$ også.

Retteveiledning

1. (a), (c), og (d) er riktige.
2. (a), (c), og (d) er riktige.
3. (a), (b), og (c) er riktige.
4. (a), og (c) er riktige.

$\triangle$

Oppgave 1 teller $5 + 5 + 5 + 5 = 20\%$**.**

Oppgave 2 Levealderen til en spesiell art av pattedyr, der vi kun betrakter antall hunner, er høyst to år. Kun $\frac{1}{3}$ overlever og blir ett-åringer. Videre er det slik at de som er under ett år føder i gjennomsnitt $\frac{5}{3}$ avkom, og de mellom ett og to år føder i gjennomsnitt 12 avkom. Ved starten har kolonien 120 individer under ett år og 80 individer mellom ett og to år.

(a) Sett opp en Lesliematrise $\mathbf{L}$ som representerer opplysningene gitt ovenfor, og finn fordelingen av individer i de to årskullene etter ett, to og tre år (rund av til nærmeste hele tall).

(b) Vis at $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor til $\mathbf{L}$. Hva er den tilhørende egenverdi?

(c) Bestem alle øvrige egenverdiene og tilhørende egenvektorene. Vis fram regningen din (detaljert). Hvilken biologisk betydning har de andre egenvektorene?

(d) Forklar så detaljert som mulig hvordan vil det gå med denne populasjonen i det lange løp. Anta at det totale antall individer ved starten var 200. Hva måtte startfordelingen i de to årskullene ha vært dersom fordelingen skulle ha vært konstant fra år til år?

Retteveiledning

(a) Man får som Leslie-matrise $\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$ for en inisialpopulasjon $\boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Antall individer etter ett, to, og tre år kan utregnes som matrise-vektor-produkter:

$$\text{ett år: } \boldsymbol{p}_1 = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{p}_0 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1160 \\ 40 \end{pmatrix} .$$

Etter to og tre år:

$$\boldsymbol{p}_2 = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1160 \\ 40 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2413 \\ 387 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{p}_3 = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{p}_2 \approx \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2413 \\ 387 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 8666 \\ 804 \end{pmatrix} .$$

(b) Man får

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 27 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \boldsymbol{u}_1 .$$

Dermed er $\boldsymbol{u}_1$ egenvektor til egenverdi $\lambda = 3$.

(c) Først bestemmer man det karakteristiske polynomet:

$$p_{\mathbf{L}}(\lambda) = \det(\mathbf{L} - \lambda \cdot \mathbf{I}) = \lambda^2 - \frac{5}{3} \cdot \lambda - 4 .$$

Rotene kan regnes ut med abc-formelen eller pq-formelen:

$$\lambda = \frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + 16} \iff \lambda = 3 \text{ eller } \lambda = -\frac{4}{3} .$$

For å finne egenvektorer $\boldsymbol{u}$, må man løse det homogenske systemet $(\mathbf{L} - \lambda \cdot \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ for $\lambda = -\frac{4}{3}$ (siden $\lambda = 3$ er allerede klart).

Det gir systemet:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{R1}-9\cdot\text{R2}\to\text{R2}} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies u_1 = -4 \cdot u_2$$

Dermed får vi en egenvektor $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ til egenverdien $\lambda = -\frac{4}{3}$.

Den har likevel *ingen* biologisk betydning, siden (minst) en komponente er negativ.

(d) Vi har at en dominant egenverdi $\lambda = 3$ til Lesliematrisen (siden $|3| > |-\frac{4}{3}|$), noe som medfører at egenverdien $\lambda = 3$ er vekstparameteren til populasjonen. Dette betyr at i det lange løp vil antall individer i hvert årskull bli tre ganger så stort for hvert år. Populasjonen vil derfor vokse mot uendelig for tid $\to \infty$. Egenvektoren tilhørende den dominerende egenverdien medfører at populasjonen i det lange løp vil få en stabil aldersfordeling på 9 til 1.

Siden $\boldsymbol{p}_0 = \underbrace{\frac{4400}{13}}_{\neq 0} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{600}{13} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ (faktorene funnet ved et lineært system) er det dessuten en andel av egenvektoren $\boldsymbol{u}_1$ i inisialpoulasjonen. (Dette er mattematisk viktig, men ikke relevant for retting her.)

$\triangle$

Oppgave 2 teller $5 + 5 + 10 + 10 = 30\%$.

Oppgave 3 Vi ser på en populasjon av oppdrettslakser (målt i kg og betegnet med $P(t)$) hvorav vi vet at:

- Bæreevnen til oppdrett populasjonen lever i er 10000kg.
- Ved tidspunkt $t = 0$ (tid blir målt i uker her) er det 200kg laks i oppdretten.
- Populasjonens vekt kan godt beskrives med en logistisk vekstmodell.

1. Opprett et inisialverdiproblem som beskriver utviklingen av laksenes vekt med tid t. Det er ikke mulig å bestemme en éntydig løsning fra informasjonen som er gitt. Beskriv med egne ord hvorfor det er slikt.
2. Anta at man vet at $P(50 \cdot \ln(10)) = 10^6 \cdot \frac{1}{149}$. Hva er laksenes vekt etter ett år (52 uker) i denne situasjonen? Vis regningene dine detaljert.
3. Anta at man vet at endringsraten av P ved $t = 0$ er $\frac{98}{11}$kg per uke. Hva er laksenes vekt etter ett år nå? Du trenger ikke å vise fram alle detaljene i regningen, men det må være klart hvilke matematiske standard-problemstillingene trenges å løses.

Retteveiledning

1. IVP består av differensialligningen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \left(1 - \frac{P(t)}{10000}\right)$$

og inisialverdien $P(0) = 200$, hvor $\alpha \in \mathbb{R}$ betegner modellens indre vekstrate.
Det er ikke mulig å bestemme løsningen, siden α er ikke kjent.

2. Modellen er en Verhulst-modell. Vi vet at dens løsning er en Gompertz-funksjon:

$$P(t) = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{P(0)} - 1\right) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot t}},$$

der $M = 10000$ er bæreevnen. Man får dermed

$$P(t) = \frac{10000}{1 + (\frac{10000}{200} - 1) \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot t}} = \frac{10000}{1 + 49 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot t}}.$$

For å bestemme α bruker vi verdien til P ved $t = 50 \cdot \ln(10)$. Det gir ligningen

$$\frac{10000}{1 + 49 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot (50 \cdot \ln(10))}} \overset{!}{=} 10^6 \cdot \frac{1}{149} .$$

Divisjon på 10000:

$$\frac{1}{1 + 49 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot (50 \cdot \ln(10))}} \overset{!}{=} \frac{100}{149} .$$

Inversjon, ≪−1≫, ≪/49≫:

$$\frac{\frac{149}{100} - 1}{49} = \frac{1}{100} = \mathrm{e}^{-\alpha \cdot 50 \cdot \ln(10)} = \mathrm{e}^{\ln(10^{-50 \cdot \alpha})} = 10^{-50 \cdot \alpha}$$

Dvs. $50 \cdot \alpha = 2$ og så: $\alpha = \frac{1}{25}$.

Så kan man regne ut løsningen etter ett år til

$$P(52) = \frac{10000}{1 + 49 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{52}{25}}} \approx 1404.18\text{kg}.$$

3. Nå vet vi at $P'(0) = \frac{98}{11}$. Vi trenger ikke å regne ut $P(t)$'s deriverte, fordi vi har differensialligningen. Den gir

$$\frac{98}{11} = P'(0) = \alpha \cdot P(0) \cdot \left(1 - \frac{P(0)}{10000}\right) = \alpha \cdot 200 \cdot (1 - \frac{200}{10000}) = 196 \cdot \alpha$$

og så $\alpha = \frac{1}{22}$. Så får man $P(52) = \frac{10000}{1+49 \cdot \mathrm{e}^{-52/22}} \approx 1782.6\text{kg}$.

△

Oppgave 3 teller $10 + 10 + 5 = 25\%$**.**

Av de neste oppgavene, velg *nøyaktig én* som du leverer. Oppgaven teller 25%.

Oppgave 4 Av en matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ vet vi at

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Hvilke elementer til $\mathbf{A}$ er entydig bestemt fra denne informasjonen og hva er de? Forklar nøye hvordan man kan finne ut av det. Du trenger ikke vise fram alle regningene (CAS system skjermdump er nok hvis du bruker det).

(b) Nå vet vi dessuten at

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} , \quad (a \in \mathbb{R}) .$$

For hvilke verdier av a blir $\mathbf{A}$ en inverterbar matrise?

Retteveiledning

(a) For $\mathbf{A}$ kan vi gjøre ansatsen $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,2,3}$ med ni ukjente tall $a_{i,j}$. Vi får to vektorligninger for å bestemme $a_{i,j}$, dvs. totalt seks ligninger:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} a_{1,1} \cdot 2 & = & -2 \\ a_{2,1} \cdot 2 & = & 2 \\ a_{3,1} \cdot 2 & = & 4 \end{array}$$

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} a_{1,2} \cdot \frac{1}{2} & = & -1 \\ a_{2,2} \cdot \frac{1}{2} & = & -1 \\ a_{3,2} \cdot \frac{1}{2} & = & 0 \end{array}$$

Disse kan løses (enkelt) og man får

$$a_{1,1} = -1\,, a_{2,1} = 1\,, a_{3,1} = 2\,, a_{1,2} = -2\,, a_{2,2} = -2\,, a_{3,2} = 0\,,$$

Alle disse elementene er éntydig bestemt; $\mathbf{A}$ sin tredje kolonne er helt ukjent fra informasjonen.

(b) Ligningen som ble gitt her oversettes igjen til tre skalare ligninger:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} \iff \begin{array}{rcl} a_{1,3} \cdot 1 & = & 3 \\ a_{2,3} \cdot 1 & = & 5 \\ a_{3,3} \cdot 1 & = & a \end{array}$$

med løsningene $a_{1,3} = 3$, $a_{2,3} = 5$, $a_{3,3} = a$.
Dermed er

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Denne matrisen er inverterbar hvis og bare hvis $\det(\mathbf{A})$ ikke er null. Man får

$$\det \mathbf{A} = 2 \cdot a - 20 + 4 \cdot a + 12 = 4 \cdot a - 8 \overset{!}{=} 0 \iff a \neq 2$$

Matrisen $\mathbf{A}$ er inverterbar så langt $a \neq 2$.

$\triangle$

Fordeling: $15 + 10 = 25\%$

Oppgave 5

(a) Gitt tre kvadratiske og inverterbare matriser $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ med et naturlig tall $n \geq 1$. Vis at det gjelder

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

og forklar hvilke lov/egenskaper av matriseregningen ble brukt.

(b) Forklar med egne ord hvorfor likheten overfor fungerer, når man ser på matrisene som lineære avbildninger.

Retteveiledning

(a) Definisjonen av «inverse matrise» betyr at

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{I}$$

med identitetsmatrisen $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
For å vise identiteten overfor må vi bytte «$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C})^{-1}$» med matrisen som er gitt, dvs.

$$(\ \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\ ) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \stackrel{!}{=} \mathbf{I}$$

Dette er faktisk rikitg siden:

$$\begin{aligned}
(\ \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}\ ) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &\stackrel{\text{assosiativitet}}{=} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\
&\stackrel{\text{assosiativitet igjen}}{=} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\
&\stackrel{\text{definisjon invers}}{=} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\
&\stackrel{\text{definisjon } \mathbf{I}}{=} \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \\
&= \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} \\
&= \mathbf{I}\,, \ \checkmark
\end{aligned}$$

og ved å bruke «definisjon invers» og «definisjon **I**» to ganger til.

NB: En (mattematisk) fullstendig løsning inneholder at man også viser at $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ faktisk er inverterbar. Dette gjelder pga. determinanten-multiplikasjonsteoremet. Det går ikke i retting her.

(b) Når vi ser på matrisene som avbildninger betyr det at $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ er en sammensatt avbildning, da man først bruker **C** på en vektor, så **B** på resultatet, og til slutten **A** på resultatet av dette. («bruker» betyr: multiplisere med matrisen fra venstre)

Når man inverterer alle disse trinnene (dvs. finne den opprinnelige vektoren fra bildet), må man dermed først invertere det siste stedet, som er **A**, så den andre (**B**) og **C** til slutten. Rekkefølgen er viktig, fordi matrisemultiplikasjon ikke er kommutativt.

△

Fordeling: $15 + 10 = 25\%$

Oppgave 6 Se på differensialligningssystemet

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= -a \cdot y_1 + y_2 \\
y_2'(x) &= \frac{y_1^2}{1 + y_1^2} - y_2\,,
\end{aligned}$$

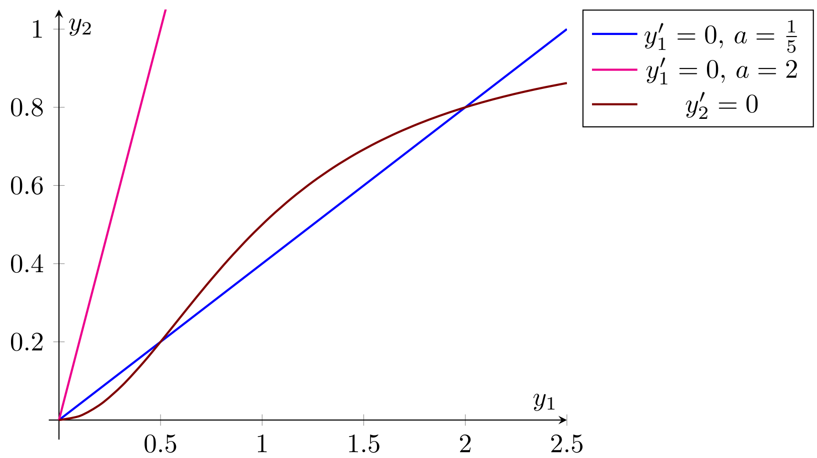
der $a > 0$ og vi bare ser på ikke-negative løsninger $y_1(x), y_2(x) \geq 0$.

1. Skissér null-isoklinene til systemet for $a = \frac{2}{5}$ og $a = 2$ i samme y_1-y_2-koordinatsystemet (for $0 \leq y_1 \leq 2.5$).
2. Hvor mange likevektløsninger har systemet for små verdier av a, hvor mange for store? Du trenger ikke å begrunne svaret ditt.
3. Det finnes nøyaktig én verdi til parameteren a, der antallet likevekter forandrer seg. Hvilken verdi er dette? Vis fram regningen detaljert.
4. Avgjør for små verdier av a (f. eks. for $a = \frac{1}{4}$) hvilke likevektene som er stabile eller ustabile. Det er igjen ikke viktig å vise alle detaljene i regningen, men må være mulig å følge med tankegangen.

Retteveiledning

1. Null-isoklinene er kurvene, da (minst) én komponente av den høyre sida er null:

$$y_1' = 0 \qquad y_2 = a \cdot y_1$$
$$y_2' = 0 \qquad y_2 = \frac{y_1^2}{1 + y_1^2}$$



2. Likevekter finnes, hvor isoklinene møtes. For små verdier av $a > 0$ skjærer kurvene seg tre ganger. For store verdier av a skjærer isoklinene seg bar for $y_1 = y_2 = 0$; man får bare én likevekt.
3. Likevekter beskrives med systemet $y_1' = y_2' = 0$. Det er (se overfor) ekvivalent til ligningen

$$y_2 = a \cdot y_1 = \frac{y_1^2}{1 + y_1^2}\,, \qquad (y_1, y_2 \geq 0)$$

Én løsning er alltid $y_1^{(1)} = 0$ med tilsvarende y_2-komponente $y_2^{(1)} = 0$. Dette forenkler ligningen til

$$a = \frac{y_1}{1 + y_1^2} \iff a + a \cdot y_1^2 - y_1 = 0$$

som gir oss flere løsninger (med abc-formelen)

$$y_1^{(2)}, y_1^{(3)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot a^2}}{2 \cdot a},$$

så langt som dette er velforklart. Hvis a er for stor, blir $1 - 4 \cdot a^2$ negativt og roten kan ikke utregnes. Hvis a er liten (nok), så er $1 - 4 \cdot a^2$ positivt og man får to roter til. Grensen mellom de to er hvor $1 - 4 \cdot a^2 = 0$, dvs. (husk: $a > 0$) på verdien $a = \frac{1}{2}$.

4. For $a = \frac{1}{4}$ er systemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -\tfrac{1}{4} \cdot y_1 + y_2 \\ y_2' &= \frac{y_1^2}{1 + y_1^2} - y_2 \end{aligned}$$

med likevektene

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}.$$

Jacobimatrisen til den høyre sida er

$$\mathbf{J}_a(\boldsymbol{y}) = \frac{\partial(y_1', y_2')^\top}{\partial(y_1, y_2)^\top} = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2 \cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{2 \cdot y_1}{(1+y_1^2)^2} & -1 \end{pmatrix}$$

For

- $\boldsymbol{y}^{(1)}$ er det $\mathbf{J}_a(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ med to negative egenverdier; dvs. likevekten er stabil,
- $\boldsymbol{y}^{(2)}$ er det $\mathbf{J}_a(\boldsymbol{y}^{(2)}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{4+2\sqrt{3}}{(1+(2+\sqrt{3})^2)^2} & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.25 & 1 \\ 0.0335 & -1 \end{pmatrix}$ med egenverdiene $\lambda_1 \approx -0.21$ og $\lambda_2 \approx -1.04$, dvs. likevekten er stabil.
- $\boldsymbol{y}^{(3)}$ er det $\mathbf{J}_a(\boldsymbol{y}^{(3)}) \approx \begin{pmatrix} -0.25 & 1 \\ 0.467 & -1 \end{pmatrix}$ med egenverdiene $\lambda_1 \approx +0.15$ og $\lambda_2 \approx -1.404$, dvs. likevekten er ustabil.

$\triangle$

Fordeling: $5 + 10 + 5 + 5 = 25\%$