NTNU | Kunnskap for en bedre verden

BRUKERKURS MATEMATIKK B — MA0002

Plenumsregning 3

M. A. Köbis
markus.kobis@ntnu.no

04. 05. 2022

Oppgave Vår 2012

Oppgave

1. Løs inisialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \cdot y^2$$

med inisialbetingelse $y(0) = 1$.

2. Ifølge Newtons avkjølingslov vil temperaturen $y(t)$ til et objekt endre seg med en rate som er proposjonal med differansen mellom objektets temperatur og temperaturen T til omgivelsene. Det vil si at

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot (y - T)\,,$$

der k er en konstant og t måles i minutter.

Et rom holder en konstant temperatur på 20 grader. Ved tiden $t = 0$ plasseres en kopp kaffe med en temperatur på 90 grader i rommet. Etter 2 minutter er kaffens temperatur 80 grader. Hvor mange minutter tar det før temperaturen blir 65 grader? (Hint: kaffens temperatur etter 2 minutter kan brukes til å bestemme konstanten k.)

Oppgave Vår 2012

Oppgave

1. Finn løsningen på systemet av differensialligninger

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x - 2 \cdot y\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 3 \cdot x - 4 \cdot y$$

   med inisialbetingelsene $x(0) = 3$, $y(0) = 4$.

2. Er likevektsløsningen $(x, y) = (0, 0)$ til systemet stabil eller ustabil? Hva skjer med løsningene til systemet når t går mot ∞?

Oppgave Vår 2014, 2

Oppgave

En stabel med mynter består av kronestykker og av fem-kroner. Du måler stabelen og finner at den er 601g tung og 197.5mm høy. Hvor mye er stabelen verdt når du vet at et kronestykke veier 4.35g og har en tykkelse på 1.7mm og at en fem-krone veier 7.85g og har en tykkelse på 2mm? (kilde: Norges Bank)

Oppgave Vår 2014, 3

Oppgave

La $\mathbf{A}$ være 2×2-matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Finn egenverdiene $\lambda_1 < \lambda_2$ til $\mathbf{A}$ og tilhørende egenvektorer $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ Om mulig, skalér egenvektorene slik at komponentene blir små positive heltall.
2. La $\mathbf{U}$ være 2×2-matrisen med kolonner bestående av egenvektorene til $\mathbf{A}$, dvs. $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 \end{pmatrix}$, og la Λ være 2×2-matrisen med egenverdiene til $\mathbf{A}$ på diagonalen: $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
   - **2.1** Beregn Λ^2. Hva er Λ^n for et vilkårlig positivt heltall n?
   - **2.2** Finn $\mathbf{U}^{-1}$ og beregn produktet $\mathbf{U} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{U}^{-1}$.
3. La $\mathbf{B}$ og $\mathbf{C}$ være to kvadratiske matriser der $\mathbf{B}$ er inverterbar. Vis at

$$\left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^{-1}\right)^n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^n \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

for alle positive heltall n. Finn deretter 2×2-matrisen $\mathbf{A}^6$. (Vis regningen)

Tusen takk!