NTNU | Kunnskap for en bedre verden

BRUKERKURS MATEMATIKK B — MA0002

Forelesning 13 - Lineær Algebra: Linje og plan i rommet (II) OPPTAK, LENKE

M. A. Köbis
markus.kobis@ntnu.no

25. 02. 2022

Organisasjon

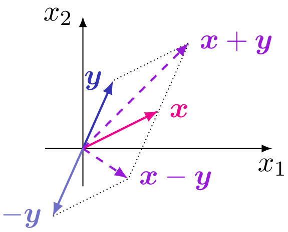
- Påminnelse: Neste uke:
  - 1.3.: «Flipped classroom» (se melding på BB fra torsdag), besøk fra «UniPed»
  - 4.3.: Ingen forelesning, video i stedet, spørsmål i mattelab/forelesningen etterpå
- I alle fall: Ikke noe opptak(!)

Spørsmål?
om organisasjon?
om forrige forelesningen?

Repetisjon: Vektorer (I)

Euklidisk rom

Geometrisk: Vektorer er piler (enklest: utgående fra origo). Disse har komponenter (algebraisk: De er ordnete n-tupler) og man «kan regne» med dem.



Formalt definerer man

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

og for alle $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i=1}^n$

- $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_i + y_i)_{i=1}^n$,
- $\alpha \cdot \boldsymbol{x} = (\alpha \cdot x_i)_{i=1}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + (-1) \cdot \boldsymbol{y}$.

Alt vel-kjent fra matriser(!)

Repetisjon: Skalarprodukt

Multiplikasjon av vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$?

$$\cancel{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}, \ \boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top, \ \cancel{\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}^\top}?$$

Definisjon: Skalarprodukt

Gitt to vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Matriseproduktet

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$$

kalles for *skalarprodukt* (dot-produkt) til de to vektorene.

Definisjon: Dyad

Produktet

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

kalles for en *dyade*. (rank-one-matrix)

I dag

- Litt mer «geometri med vektorer»: Lengde og vinkel
- Geometri (linje og plan i rommet (II))

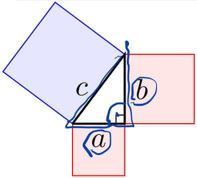
Spørsmål?

Pythagoras læresetning

$$\Rightarrow w^2 = x_1^2 + x_3^2$$

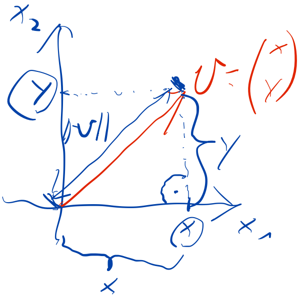
$$\|v\|^2 = x_2^2 + w^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$



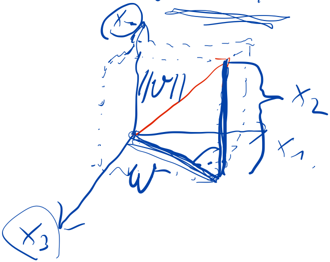
Det gjelder

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$



$$\|v\|^2 = x^2 + y^2$$

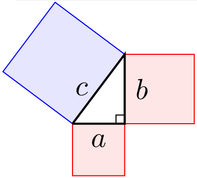
$$\Rightarrow \|v\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Vektorer

Lengde

Pythagoras læresetning



Det gjelder

$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

Definisjon

Lengden (normen) $\|\boldsymbol{x}\|$ av en vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \,.$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

Vektorer

Lengde (b)

Lengde: $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Bruk av skalarproduktet?

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$x^T \cdot y = x_1 y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots + x_n \cdot y_n$

$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \cdots + x_n \cdot x_n$

$\|x\| = \sqrt{}$

Vektorer

Lengde (b)

Lengde: $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Bruk av skalarproduktet?

Alernativt

Lengden til en vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ blir gitt ved

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{x}}\,.$$

Vektorer

Lengde (b)

Lengde: $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Bruk av skalarproduktet?

Alernativt

Lengden til en vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ blir gitt ved

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{x}}\,.$$

Oppgave (9.4.9)

Regn ut lengden til vektoren $\boldsymbol{x} = (0, 1, 5)^\top$ ved å bruke skalarproduktet.

Vektorer

Lengde (b)

Lengde: $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

Bruk av skalarproduktet?

Alernativt

Lengden til en vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ blir gitt ved

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{x}}\,.$$

Oppgave (9.4.9)

Regn ut lengden til vektoren $\boldsymbol{x} = (0, 1, 5)^\top$ ved å bruke skalarproduktet.
Svar: Vi finner

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 25^2} = \sqrt{26} \approx 5.099\,.$$

Og retningen?

Vektorer

Normalisering

Definisjon: Normalisering

Hver vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ kan normaliseres til en enhetsvektor (OBS!) som

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \boldsymbol{x} \, .$$

Vektorer

Normalisering

Definisjon: Normalisering

Hver vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ kan normaliseres til en enhetsvektor (OBS!) som

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \boldsymbol{x} \,.$$

Vektorer

Normalisering

Definisjon: Normalisering

Hver vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ kan normaliseres til en enhetsvektor (OBS!) som

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \boldsymbol{x}\,.$$

Oppgave (9.4.12)

Normalser vektoren $\boldsymbol{x} = (2, 0, -4)^\top$.

Vektorer

Normalisering

Definisjon: Normalisering

Hver vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ kan normaliseres til en enhetsvektor (OBS!) som

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \boldsymbol{x}\,.$$

Oppgave (9.4.12)

Normalser vektoren $\boldsymbol{x} = (2, 0, -4)^\top$.
Svar: Man får

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \cdot \boldsymbol{x} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

«Retninger» er jo vinkler(!)

Vektorer

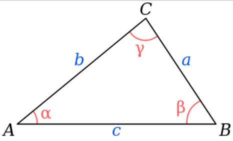
Vinkler (a)

I trigonometrien er **cosinussetningen** en setning om sammenhengen mellom sidene i en generell trekant og cosinus til en av vinklene i trekanten. Ved å bruke notasjonen i figur 1, sier cosinussetningen at

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

der c er den motstående siden til vinkel γ mellom sidene a og b.

Cosinussetningen generaliserer Pythagoras' læresetning, som bare gjelder for rettvinklede trekanter: hvis vinkel γ er en rett vinkel (90 grader



Figur 1 – En trekant

Vektorer

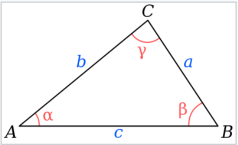
Vinkler (a)

I trigonometrien er **cosinussetningen** en setning om sammenhengen mellom sidene i en generell trekant og cosinus til en av vinklene i trekanten. Ved å bruke notasjonen i figur 1, sier cosinussetningen at

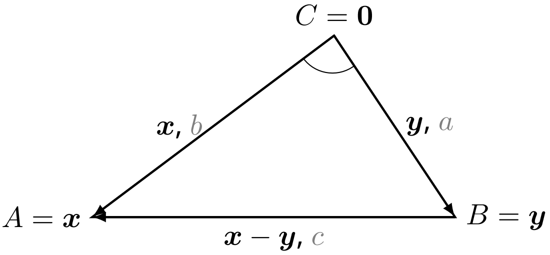
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

der *c* er den motstående siden til vinkel *γ* mellom sidene *a* og *b*.

Cosinussetningen generaliserer Pythagoras' læresetning, som bare gjelder for rettvinklede trekanter: hvis vinkel *γ* er en rett vinkel (90 grader



Figur 1 – En trekant



$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2 \cdot \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos(\sphericalangle(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}))$$

Vektorer

Vinkler (b)

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2 \cdot \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos(\gamma)$$

Vektorer

Vinkler (b)

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 - 2 \cdot \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos(\gamma)$$

Definisjon: Vinkel mellom vektorer

Vi finner vinkelen γ mellom to vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ gjennom bruk a formelen

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\| \cdot \cos\gamma \implies$$
$$\gamma = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}\right), \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0})$$

Når/Hva med $\cos\gamma = 0$?

Vinkler

Rette vinkler

Definisjon: Ortogonal /perpendikulær

To vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ er *ortogonale* (perpendikulære) hvis

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = y^\top \cdot x = 0\,.$$

Vinkler

Rette vinkler

Definisjon: Ortogonal /perpendikulær

To vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ er *ortogonale* (perpendikulære) hvis

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = y^\top \cdot x = 0\,.$$

Oppgave

Avgjør om $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ er perpedikulære:

(a) $\boldsymbol{x} = (3, 2)^\top$, $\boldsymbol{y} = (-2, 2)^\top$

(b) $\boldsymbol{x} = (2, -1, 1)^\top$, $\boldsymbol{y} = (1, 2, 0)^\top$

Vinkler

Rette vinkler

Definisjon: Ortogonal /perpendikulær

To vektorer $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ er *ortogonale* (perpendikulære) hvis

$$\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^\top \cdot \boldsymbol{x} = 0\,.$$

Oppgave

Avgjør om $\boldsymbol{x}$ og $\boldsymbol{y}$ er perpedikulære:

(a) $\boldsymbol{x} = (3, 2)^\top$, $\boldsymbol{y} = (-2, 2)^\top$

(b) $\boldsymbol{x} = (2, -1, 1)^\top$, $\boldsymbol{y} = (1, 2, 0)^\top$

Svar: (a) $\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = -2 \neq 0$ (ikke perp.)
(b) $\boldsymbol{x}^\top \cdot \boldsymbol{y} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$ (perp.)

Linjer og plan

Linjer: $\mathbb{R}^2$

Parameter representasjon av linjer i planet

- Start med et punkt

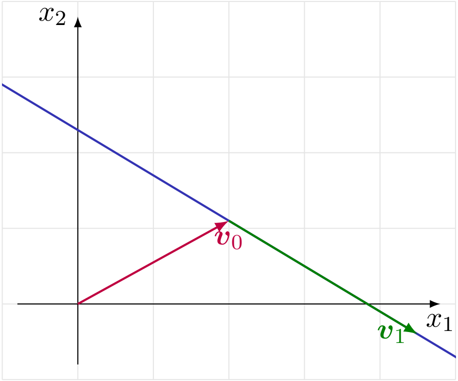
$$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^2$$

  på linja.

- Så leg til alle punkt som kan skrives som

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 \,,$$

  der $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ noterer linjas retning og $t \in \mathbb{R}$.



Linjer: $\mathbb{R}^2$

Parameter representasjon av linjer i planet

- Start med et punkt

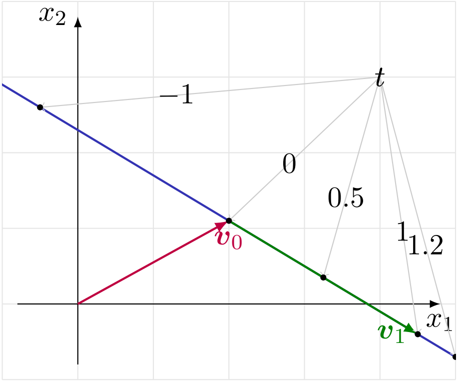
$$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^2$$

på linja.

- Så leg til alle punkt som kan skrives som

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 \ ,$$

der $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^2$ noterer linjas retning og $t \in \mathbb{R}$.



Linjer: $\mathbb{R}^3$

Parameter representasjon av planer i rom

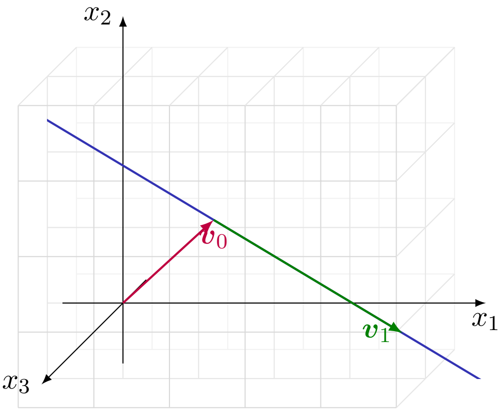
- Start med et punkt

$$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^3$$

  på linja.
- Så leg til alle punkt som kan skrives som

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 \,,$$

  der $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ noterer linjas retning i rommet.



Linjer: $\mathbb{R}^3$

Parameter representasjon av planer i rom

- Start med et punkt

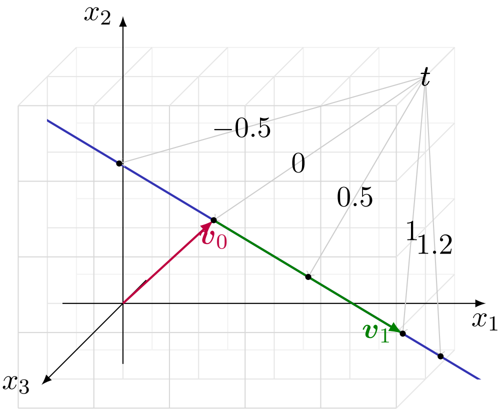
$$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^3$$

  på linja.

- Så leg til alle punkt som kan skrives som

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 \,,$$

  der $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{v}_1 \in \mathbb{R}^3$ noterer linjas retning i rommet.



Plan: (bare) $\mathbb{R}^3$

Parameter representasjon av plan i rom

- Start med et punkt

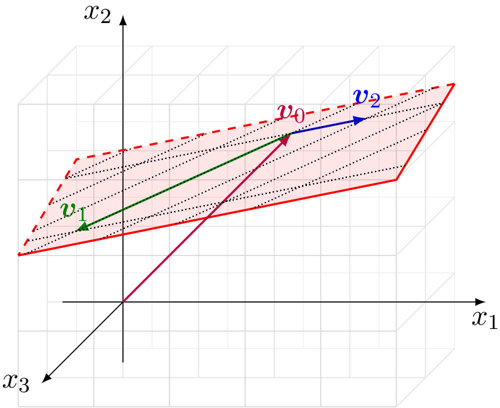
$$\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^3$$

  på planet.

- Så leg til alle punkt som kan skrives som

$$\boldsymbol{v}(t, s) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 + s \cdot \boldsymbol{v}_2 \,,$$

  der $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ noterer to (forskjellige) retninger i planet.



Hva har det å gjøre med lineære systemer og/eller matriser?

Projeksjon

Oppgave

Gitt ei linje $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1$ i planet og et punkt P «=» $\boldsymbol{x}$. Hva er avstanden mellom P og linja?

Projeksjon

Oppgave

Gitt ei linje $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1$ i planet og et punkt P «=» $\boldsymbol{x}$. Hva er avstanden mellom P og linja?

Del-Svar:

Man får $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1$.

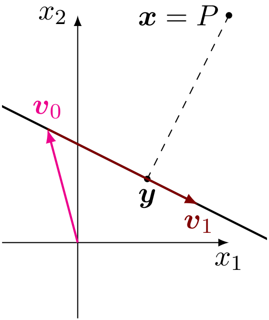
Dessuten

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$$

Også

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_0 - t \cdot \boldsymbol{v}_1)^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$$

$$t = \frac{(x - \boldsymbol{v}_0)^\top \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1^\top \cdot \boldsymbol{v}_1}$$



Projeksjon

Oppgave

Gitt ei linje $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1$ i planet og et punkt P «=» $\boldsymbol{x}$. Hva er avstanden mellom P og linja?

Del-Svar:

Man får $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1$.

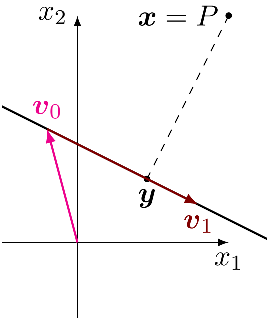
Dessuten

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$$

Også

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}_0 - t \cdot \boldsymbol{v}_1)^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$$

$$t = \frac{(x - \boldsymbol{v}_0)^\top \cdot \boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1^\top \cdot \boldsymbol{v}_1}$$



Anbefaling: Og hva i $\mathbb{R}^3$?

Linjer: $\mathbb{R}^2$ rev.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1\,, \ (t \in \mathbb{R})$$

Hva gjorde projeksjonen?
$\rightarrow$ Finn en vektor $\boldsymbol{n}$ som viser i en perpendikulær retning, dvs.

$$\boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0\,.$$

$$\Rightarrow \ \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_0}_{=:a} + t \cdot \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = a$$

Linjer: $\mathbb{R}^2$ rev.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1\,,\ (t \in \mathbb{R})$$

Ser ut som en generell løsning til et lineært system med t som parameter.

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$$

Her: $\mathbf{A} = \boldsymbol{n}^\top \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $\boldsymbol{b} = a \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.

Hva gjorde projeksjonen? $\rightarrow$ Finn en vektor $\boldsymbol{n}$ som viser i en perpendikulær retning, dvs.

$$\boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0\,.$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_0}_{=:a} + t \cdot \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = a$$

Linjer: $\mathbb{R}^2$ rev.

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1\,, \ (t \in \mathbb{R})$$

Ser ut som en generell løsning til et lineært system med t som parameter.

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$$

Her: $\mathbf{A} = \boldsymbol{n}^\top \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $\boldsymbol{b} = a \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.

Hva gjorde projeksjonen? $\rightarrow$ Finn en vektor $\boldsymbol{n}$ som viser i en perpendikulær retning, dvs.

$$\boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0\,.$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_0}_{=:a} + t \cdot \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v}_1 = a$$

Implisit ligning til ei linje i planet

Punktene på ei linje perpendikulær til vektoren $\boldsymbol{n}$ kan skreves som

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 : \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v} = a\}$$

med et tall $a \in \mathbb{R}$.

Plan i $\mathbb{R}^3$ rev.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 + s \cdot \boldsymbol{v}_2\,,\ (s, t \in \mathbb{R})$$

ser ut som en generell løsning til et lineært system i $\mathbb{R}^3$.

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{} \cdot \boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{b}}_{}\,.$$

Plan i $\mathbb{R}^3$ rev.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1 + s \cdot \boldsymbol{v}_2\,, \ (s, t \in \mathbb{R})$$

ser ut som en generell løsning til et lineært system i $\mathbb{R}^3$.

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{n}^\top \in \mathbb{R}^{1\times 3}} \cdot \boldsymbol{v} = \underbrace{\boldsymbol{b}}_{a \in \mathbb{R}}\,.$$

Her trenger vi bare én ligning(!)

Implisit representasjon til et plan i rommet ($\mathbb{R}^3$)

Alle punkt på et plan i rommet med en vektor $\boldsymbol{n} \neq \mathbf{0}$ som står perpendikulært på planet kan beskrives med

$$\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{n}^\top \cdot \boldsymbol{v} = a\}$$

med et tall $a \in \mathbb{R}$.

Linjer: $\mathbb{R}^3$ rev.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t, s) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1\,,\ (t \in \mathbb{R})$$

Når har (kan ha) et lineært system med tre ukjente løsningene som er avhengig av nøyaktig én parameter?

Linjer: $\mathbb{R}^3$ rev.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t,s) = \boldsymbol{v}_0 + t \cdot \boldsymbol{v}_1\,, \;\; (t \in \mathbb{R})$$

Når har (kan ha) et lineært system med tre ukjente løsningene som er avhengig av nøyaktig én parameter? Da trenger vi to ligninger(!)

Implisit ligning til ei linje i $\mathbb{R}^3$

Alle punkt på ei linje i $\mathbb{R}^3$ kan skrives som

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_1^\top \\ \boldsymbol{n}_2^\top \end{pmatrix} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \;\; (a_1, a_2 \in \mathbb{R})\,,$$

da $\boldsymbol{n}_1$ og $\boldsymbol{n}_2$ er (lineært uavhengige) vektorer som er perpendikulære til linja.

Geometrisk: Snittmengde av to plan i rommet.

Sammendrag og Utsyn

Sammendrag

- Lineær Algebra:
  - Geometri beskrives med formeler
  - Verktøy 1: Matriser
  - (Avansert) verktøy: Egenverdier og egenvektorer

Utsyn

- Flerdimensional Kalkulus
- Differensialligninger

Tusen takk