NTNU | Kunnskap for en bedre verden

BRUKERKURS MATEMATIKK B — MA0002

Forelesning 11 - Lineær Algebra: Egenverdier og egenvektorer (II) OPPTAK, LENKE

M. A. Köbis
markus.kobis@ntnu.no

18. 02. 2022

Spørsmål?

om organisasjon?

om forrige forelesningen?

Forrige Gang

- Determinante og hva de har å gjøre med (homogene) lineære ligningssystemer
- Kortmotivasjon for «egenverdier og egenvektorer»
- Definisjon av dette

Repetisjon I

Definisjon: Homogene systemer

Et lineært ligningssystem

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\,,$$

dvs. med nullvektoren som høyre sida kalles for et *homogensk* lineært system.
Vektoren $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ er alltid en løsning.

Determinanter og homogene systemer

Gitt en kvadratisk matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Det homogene systemet $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ har uendelig mange løsninger hvis

$$\det \mathbf{A} = 0\,.$$

Spørsmål?

I dag

- Beregn noen egenverdier og egenvektorer
- Anvendelse: Leslie modeller igjen
- Kanskje: «Google page rank»

Egenverdier (I)

Definisjon

Definisjon: Egenvektor, Egenverdi

Gitt en matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Hvis det finnes en vektor $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ og et (reelt) tall λ, slik at

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v}}$$

så kaller vi $\boldsymbol{v}$ *egenvektor* og λ *egenverdi* til $\mathbf{A}$.

Egenverdier og egenvektorer (II)

Geometri

Se på Eksemplene fra fredag:

- identitet

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \cdot v = \lambda \cdot v$$
$$\shortparallel$$
$$1$$

$$v \mapsto \underline{I_2} \cdot v = v$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ egenvektor $\cancel{?}$!

$$I_2 \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

alle vektorer $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ er egenvektorer til egenverdien $\lambda = 1$.

Egenverdier og egenvektorer (II)

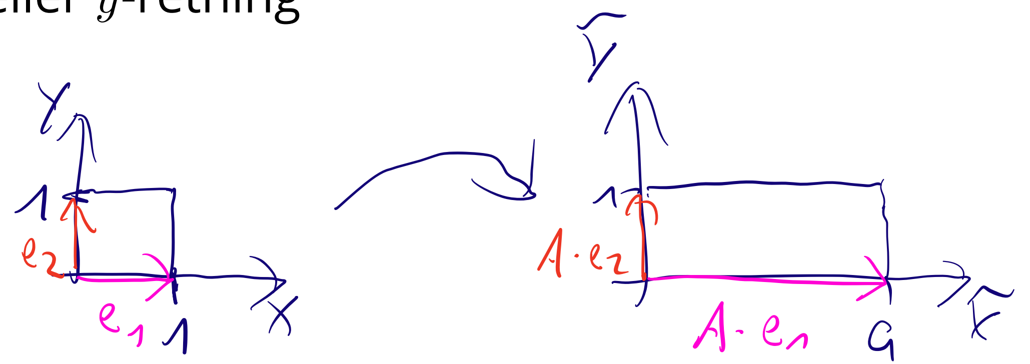
Geometri

Se på Eksemplene fra fredag:

- identitet
- skalering i x og/eller y-retning

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A \cdot e_2 = e_2 = 1 \cdot e_2$$

e_2 er egenvektor av A til egenverdi $\lambda = 1$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \cdot e_1$$

e_1 er egenvektor til e-verdi $\lambda = a$.

Egenverdier og egenvektorer (II)

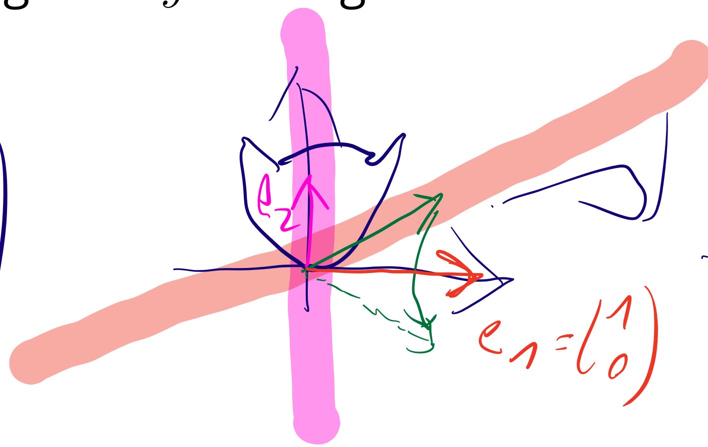
Geometri

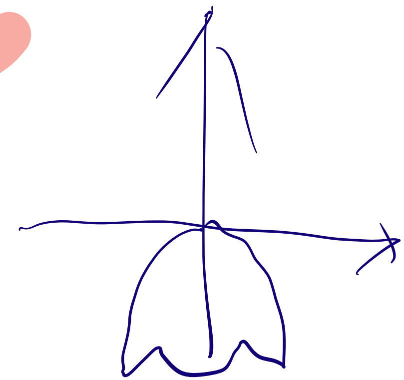
$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

Se på Eksemplene fra fredag:

- identitet
- skalering i x og/eller y-retning
- speiling

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$





$$A \cdot e_1 = e_1 = 1 \cdot e_1$$

$$A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot e_2$$

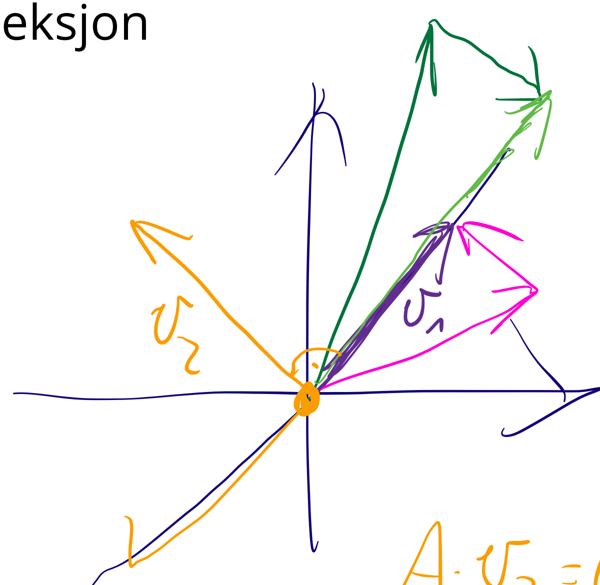
Egenverdier og egenvektorer (II)

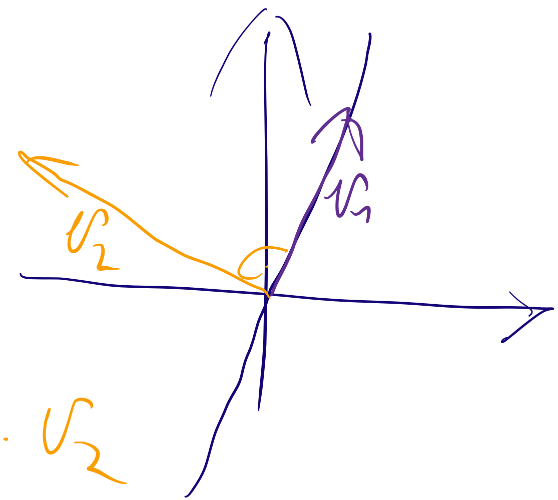
Geometri

Se på Eksemplene fra fredag:

- identitet
- skalering i x og/eller y-retning
- speiling
- projeksjon

$A \cdot v_1 = v_1 = 1 \cdot v_1$





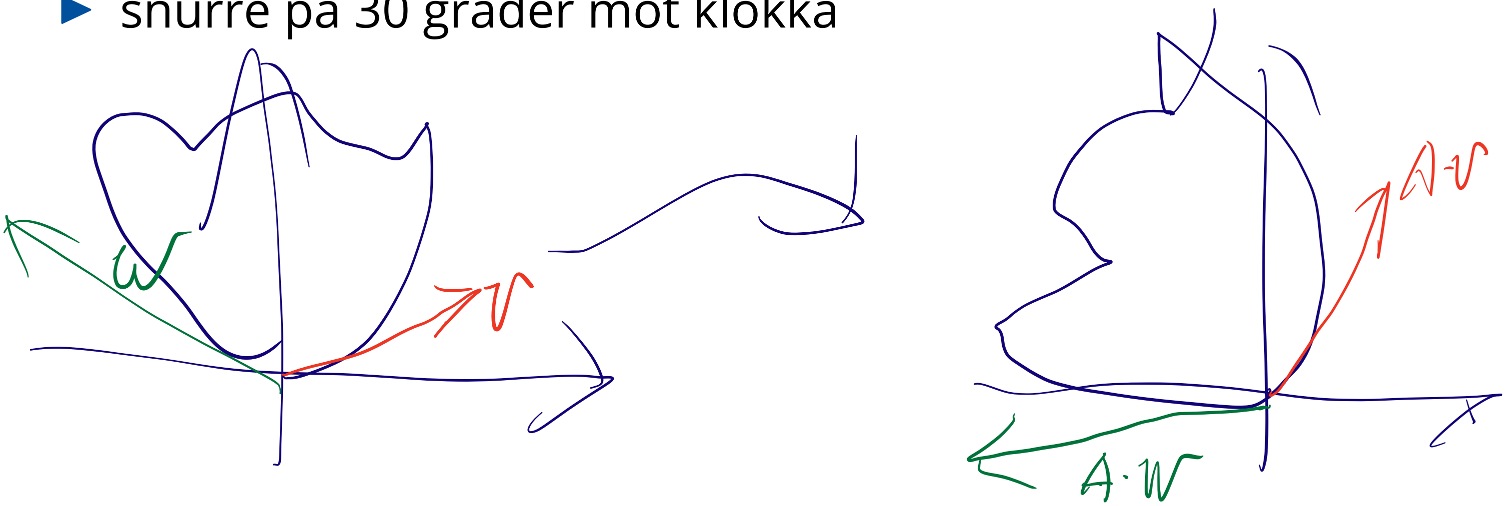
$A \cdot v_2 = 0 = \lambda \cdot v_2$, $\lambda = 0$

Egenverdier og egenvektorer (II)

Geometri

Se på Eksemplene fra fredag:

- identitet
- skalering i x og/eller y-retning
- speiling
- projeksjon
- snurre på 30 grader mot klokka



Egenverdier og egenvektorer (III)

Utregning

Gitt en generell matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Hva gjør vi nå?

$(v \neq 0)$ $\quad A \cdot v = \lambda \cdot v \quad \Big| - \lambda \cdot v$

$$A \cdot v - \lambda \cdot v = 0$$

$$A \cdot v - (\lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$$

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot v = 0$$ kvadratisk homogent lineært lig.-system

$$\det(A - \lambda \cdot I_n) \overset{?}{=} 0 = p_A(\lambda)$$ karakteristisk polynom

Egenverdier og egenvektorer (III)

Utregning

Gitt en generell matrise $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Hva gjør vi nå?

Oppskrift: Regn ut egenverdier og egenvektorer

0. Du trenger: (i) en kvadratisk matrise, (ii) determinanter, (iii) lineære systemer

1. Regn ut det *karakteristiske polynomet* $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I}_n)$.

2. Bestem rotene til p.
Da har du egenverdiene!

$p(\lambda) = 0$

3. Løs de (homogene) lineære systemene

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{I}_n) \cdot \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$$

for alle egenverdiene λ_i. Da er du ferdig.

Egenverdier og egenvektorer (IV)

Eksempler (a)

Oppgave

Finn alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

① $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) - (-6)\cdot 9$

$= -56 - \lambda + \lambda^2 + 54 = \lambda^2 - \lambda - 2$

② $p(\lambda) = 0$: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} a\cdot\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \\ \lambda^2 + p\cdot\lambda + q = 0 \end{array}}$

$\lambda = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Egenverdier og egenvektorer (IV)

Eksempler (a)

Oppgave

Finn alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$0 = \lambda^2 - 2 \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot \lambda + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$

$$= \left(\lambda - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$$\underline{\pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \left(\lambda - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^{\cancel{2}}}$$

Egenverdier og egenvektorer (IV)

Eksempler (a)

Oppgave

Finn alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1 = -1$:

$A - \lambda \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 8+1 & -6 \\ 9 & -7+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$; $(A - \lambda_1 \cdot I_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc|c} 9 & -6 & 0 \\ 9 & -6 & 0 \\ \hline 9 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_2 = 3 \rightarrow x_1 = 2$

$x_2 = t \rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \cdot t$

$\lambda_2 = 2$:

$(A - \lambda_2 \cdot I) = \begin{pmatrix} 8-2 & -6 \\ 9 & -7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} t \\ t \end{pmatrix}$

$t \neq 0$

$$\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 9 & -9 & 0 \end{array}$$

Egenverdier og egenvektorer (IV)

Eksempler (b)

Oppgave

Bestem egenverdiene og -vektorene til $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

① $p(\lambda) = \det(B - \lambda \cdot I_3)$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & \frac{3}{2} \\ 6 & 1-\lambda & -3 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) - \frac{3}{2}(-4)(1-\lambda)$$

$$= \ldots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda$$

② $p(\lambda) = 0$ $\quad \lambda_1 = 0$

$$+\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0 \implies \lambda_2 = 1$$

Egenverdier og egenvektorer (IV)

Eksempler (b)

Oppgave

Bestem egenverdiene og -vektorene til $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3

$\lambda_1 = 0$ $\quad B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 1: \begin{pmatrix} -2-1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 6 & 1-1 & -3 \\ -4 & 0 & 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 6 & 0 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Egenverdier og egenvektorer (IV)

Eksempler (b)

Oppgave

Bestem egenverdiene og -vektorene til $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 & -3 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1\,,\ \lambda_3 = 0\,,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\,,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Egenverdier og Egenvektorer (IV) Eksempler (c)

Oppgave

Bestem alle egenverdier og egenvektorer til $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -8 & 13 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

1. $$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -8-\lambda & 13 \\ -5 & 8-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-8-\lambda)(8-\lambda) + 13 \cdot 5$$

$$= -64 + \lambda^2 + 65$$

$$= \lambda^2 + 1 \implies \text{Ingen egenverdi (reell)}$$

Litt mer informasjon...

- Egenvektorer til én egenverdi former linjer og/eller plan i rommet (uten null). Disse kalles for *egenrom*.
- Dimensjonene (linje: en, plan: 2 osv.) til egenrom kalles for *egenverdiens multiplisitet*.
- «Teoremet om Jordan-normalformen» forklarer (nesten) alt om egenverdier/egenvektorer.

Spørsmål?

Noe teoremer som hjelper med utregningen

Litt hjelp for 2×2

$p(\lambda_1) = 0 \qquad p(\lambda_2) = 0$

Vietas teorem

Definisjon: Spor

Sporet (eng. trace, $\mathrm{tr}()$) til en kvadratisk matrise $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ er summen av hoveddiagonalelementene

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a_{11} + a_{22})}\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \mathrm{tr}\,A \cdot \lambda + \det A$$

$$= (\lambda - \lambda_1) \cdot (\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \lambda + \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Litt hjelp for 2×2

Vietas teorem

Definisjon: Spor

Sporet (eng. trace, $\mathrm{tr}()$) til en kvadratisk matrise $\mathbf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ er summen av hoveddiagonalelementene

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

François Viète (lat. Franciscus Vieta),

1540 – 1603

Teorem

Hvis $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ med egenverdiene λ_1 og λ_2 (kanskje like), så gjelder

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2\,, \quad \det\mathbf{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2\,.$$

Litt hjelp for diagonalmatriser

Oppgave

Bestem alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave

Bestem alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

$$B \cdot e_1 = 1 \cdot e_1$$

$$B \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e_2$$

Litt hjelp for diagonalmatriser

Oppgave

Bestem alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave

Bestem alle egenverdiene og egenvektorene til

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Observasjon

(Ikke-triviale multiplum til) enhetsvektorene er egenvektorene til hoveddiagonalelementene som egenverdiene.

Litt hjelp for trappematriser

Oppgave

Finn én egenverdi med tilhørende egenvektor for matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Så, finn alle andre egenverdiene.

Observasjon

Egenverdiene til en matrise i trappeform er hoveddiagonalelementene. Enhetsvektoren $\boldsymbol{e}_n$ er alltid en egenvektor. Å regne ut de andre egenvektorene er «forholdsvis enkelt».

Anvendelse: «Google page rank»

Bestem **Rekkefølge** (målt i «page rank») av nettsider ved å bruke antall lenker til hver side:

Problem: Hvis en side ikke er «viktig», burde den ikke ha en stor innflyttelse.

Idé: Hver side fordeler verdien sin verdi jevnt på alle sider den viser på.
Man vet ikke (på forhånd) hvor viktig hver side er ($\rightarrow$ kretsløp i regning)

Én (bilioner kroner) løsning: Finn en Egenvektor til den so-kallte «Googlematrix» med Egenverdi $\lambda = 1$.
Det er mulig å bevise at sånn en (positiv) vektor eksisterer (tom. at den er éntydig)

Anvendelse: «Google page rank» (forts.)

Strategi:

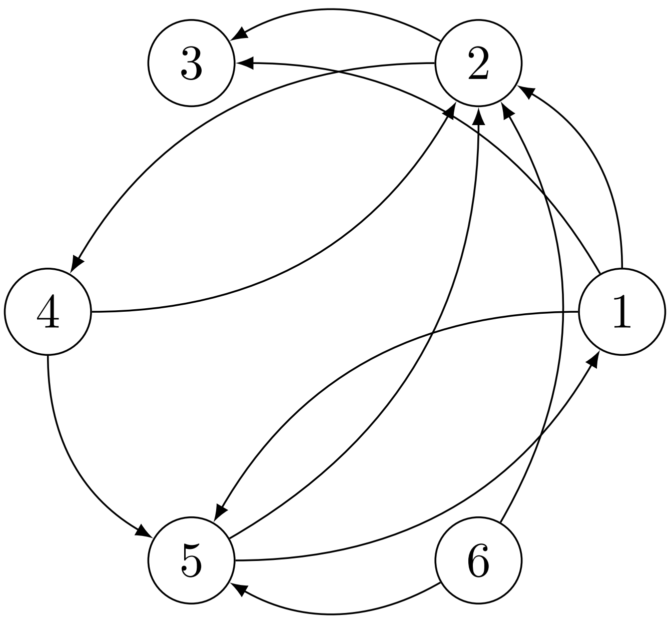
1. Bruk en «crawler» for å finne lenker i nettet.
2. Bygg den *råe Googlematrisen* $\mathbf{P}_0$ (bare med de utgående lenkene), legg til sider ute utgående lenker
3. Definer en diskonteringsfaktor $0 < \alpha < 1$ for å unngå søkk(?)
4. Definer Googlematrisen

$$\mathbf{P} := \alpha \cdot \mathbf{P}_0 + (1-\alpha) \cdot \frac{\mathbb{1} \cdot \mathbb{1}^\top}{n}, \qquad (\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top)$$

5. Beregn (venstre) egenvektoren til egenverdien $\lambda = 1$
6. Finn kunder som betaler for å få større «google rank».

Anvendelse: «Google page rank» (forts.)

Eksempel:



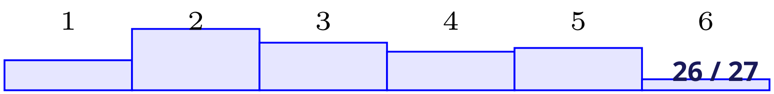
$$\mathbf{P}_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

La $\alpha = 0.9$:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{19}{60} & \frac{19}{60} & \frac{1}{60} & \frac{19}{60} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{60} & \frac{7}{15} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{7}{15} & \frac{1}{60} \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} \\ \frac{1}{60} & \frac{7}{15} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{7}{15} & \frac{1}{60} \end{pmatrix}$$

Egenvektor av $\mathbf{P}^\top$ for $\lambda = 1$:

$$\boldsymbol{v}_1^\top \approx (0.13 \quad 0.26 \quad 0.21 \quad 0.17 \quad 0.18 \quad 0.05)$$



Tusen takk