NTNU | Kunnskap for en bedre verden

BRUKERKURS MATEMATIKK B — MA0002

Forelesning 2A - Integrasjon med substitusjon OPPTAK

M. A. Köbis
markus.kobis@ntnu.no

14. 01. 2022

Organisasjon

Noen endringer (flere kommer senere:-())

1. Oppmøte i øvingene: Ikke nødvendig lenger! Viktig er innleveringene (og bare dem)
2. Det betyr: (i) Å bytte er mulig (for nå), (ii) ingen tildeling via BB som opprinelig planlagt.
3. Øvingsgrupper i BB er ikke fysiske grupper, men gjelder retting.
4. Tanke om 'A-uker' og 'B-uker'
5. Innleveringene via BB som **én** (og nøyaktig én) pdf

Endringer i digital mattelab

https://mattelab2022v.math.ntnu.no/c/ma0002/48

Om Eksamen

- Fortsatt usikkerhet (Beklager!)
- Muligheter som står i rommet:
  - muntlig eksamen i stedet
  - prosjektoppgaver i løpet av hele semesteret (som en delvurdering)
  - hjemmeeksamen (bestått/ikke bestått eller karakterer)
  - Skriftlig skoleeksamen
- Frist: 27. januar(!)

Timeplan og Kontakt

1. Problemer med BB?
2. Bruk digital mattelab hvis mulig
3. Beklager forskinkelsene! (Video, skriptum, skriftlig forklaring om hva ‘godkjent’ betyr)

Spørsmål?

Integrasjonsteknikker

Substitusjon

Kjerneregelen

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Analysens Fundamentalteorem gir oss da:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int f'(u)\mathrm{d}u = f(g(x)) + C$$

Eksempler

Oppgave: Finn en antiderivert til funksjonen
$h(x) = 4x \cdot \sqrt{x^2+1}.$

$f(u) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot u^{3/2} = \frac{2}{3} u^{3/2}$

Idé: $g(x) = x^2 + 1$

$f'(u) = \sqrt{u} = u^{1/2}$

$g'(x) = 2 \cdot x$

$= 4 \cdot x \cdot f'(g(x))$

$= 2 \cdot 2 \cdot x \cdot f'(g(x))$

$= 2 \cdot g'(x) \cdot f'(g(x))$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$\int x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \cdot x^n (+C)$

$\int h(x) dx = \int 2 \cdot g'(x) \cdot f'(g(x)) dx = 2 \cdot \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx$

$= 2 \cdot (f(g(x)) + C) = \frac{2 \cdot 2}{3} (x^2+1)^{3/2} (+C)$

Eksempler

Oppgave (Eks. i fjor): Finn en antiderivert til $h(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

$g(x) = x^2+1 \qquad g'(x) = 2x \qquad h = \frac{x}{g(x)} = x \cdot \frac{1}{g(x)}$

$f(u) = \ln|u| \qquad f'(u) = \frac{1}{u}$

$$\int h(x)\,dx = \int x \cdot f'(g(x))\,dx = \int \frac{\overset{g'(x)}{\overbrace{2x}}}{2} \cdot f'(g(x))\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[f(g(x)) \, (+C) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln|x^2+1| \; (+\hat{C})$$

Hvordan vet vi hva f' og g' er?

Alternative Metode

Leibniz notasjon

$$\int F(g(x), x)\,dx = I \qquad u = g(x)$$

$$dx = \frac{du}{g'(x)} \qquad \boxed{g'(x) = \frac{du}{dx}}$$

$$I = \int \frac{F(u, x)}{g'(x)}\,du$$

$$h(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad u = g(x) = x^2+1 \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x}{u} \cdot \frac{du}{2x} = \boxed{\frac{1}{2} \int \frac{du}{u}} \qquad dx = \frac{du}{2x}$$

Substitusjon

Teorem: Substitusjonsteknikk

Anta $u = g(x)$.

(a) Det gjelder

$$\int f'(u) \cdot g'(x) \mathrm{d}x = \int f'(u) \mathrm{d}u = f(g(x)) + C$$

med $C \in \mathbb{R}$.

(b) Fremover gjelder det

$$\int_a^b f'(u) \cdot g'(x) \mathrm{d}x = [f(u)]_{g(a)}^{g(b)} = [f(g(x))]_a^b \ .$$

$= f(g(b)) - f(g(a))$

Praktisk

$$\frac{\sin x + (\cos x)^2 - (\tan x)^3}{\sin x + \cos x}$$

1. Typiske substitusjoner (tom. universalsubstitusjoner)
2. I eksamen: ofte gitt
3. Tips: Se på roter, trigonometriske funsjoner osv.

Spørsmål?