NTNU | Kunnskap for en bedre verden

BRUKERKURS MATEMATIKK B — MA0002

Forelesning 1B - Integrasjon med substitusjon OPPTAK

M. A. Köbis
markus.kobis@ntnu.no

11. 01. 2022

Historisk Informasjon

Nesten hver Kalkulus bok

kontinuitet $\rightarrow$ derivasjon $\rightarrow$ integrasjon

Vitenskapens historie



Archimedes $\sim$ 250 f. Kr.

Johannes Kepler $\sim$ 1615

Pierre de Fermat $\sim$ 1635


Johann Leibniz $\sim$ 1670

Isaac Newton $\sim$ 1665



Karl Weierstraß $\sim$ 1865

Sofja Kovalevskaja $\sim$ 1880

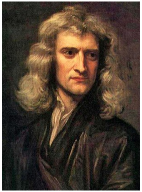
Richard Dedekind $\sim$ 1870

Derivasjon (i)

Hva er stigningstallet til en kurvete linje?

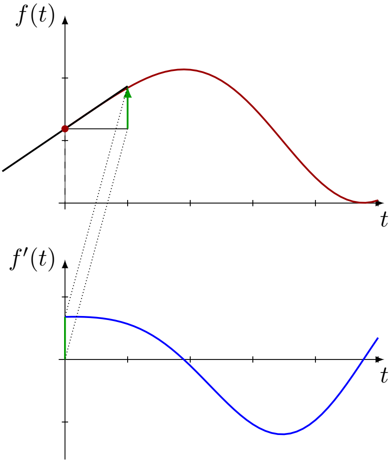
Idé: ‘Infinitesimale størrelser’

Infinitesimal: ‘Unendelig liten, men ikke null’



Sir Isaac Newton, 25. 12. 1642 – 20. 3. 1726

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1. 7. 1646 – 14. 11. 1716

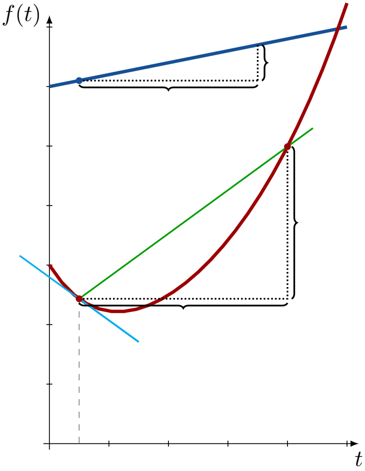


Derivasjon (ii)

Hvordan regner men dette ut?

Begrepet **Grenseverdi**

Karl Weierstraß
31. 10. 1815 – 19. 2. 1897



Derivasjon (iii)

Deriverte

Anta at funksjonen f er definert i en omegn om punktet a. Dersom grenseverdien

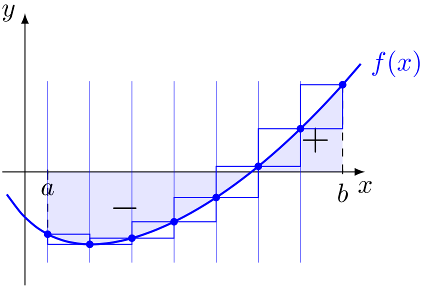
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(h)}{h}$$

eksisterer, sier vi at f er deriverbar i a. Vi skriver $f'(a)$ eller $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a}$ eller $(D_x f(x))\Big|_{x=a}$ for grenseverdien og kaller denne størrelsen for den deriverte til f i punktet a.

Derivasjonsregler

(i)	$(c)' = 0$	(ii)	$(x^m)' = m \cdot x^{m-1}$
(iii)	$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	(iv)	$(\ln\lvert x\rvert)' = x^{-1}$
(v)	$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$	(vi)	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
(vii)	$(f(x) \cdot g(x))' = f' \cdot g + f \cdot g'$	(viii)	$(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
(ix)	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$		

Integrasjon



Idéer:

- Del opp i partisjoner $P = \{x_i\}_{i=0}^{n}$:
  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, med intervalllengder $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$
- Definer Riemann summer (for alle i er $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$):

$$R(f, P, \{s_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot \Delta x_i$$

Integrasjon

- Første definisjon: $$R(f, P, \{s_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot \Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} R(f, P, \{s_i\}) = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(s_i) \cdot \Delta x_i$$

"$\int$" som "S"umme som "S"igma
"d" som "D"ifferens som "D"elta

- Darboux: Bruk nedre og øvre (Riemann) summer ($L(f, P)$ og $U(f, P)$), dvs.

$$s_i^{(l)} = l_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)\,, \quad s_i^{(u)} = u_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

- Heine (1871): På begrensete lukkete intervaller $[a, b]$ kan vi konstruere dette.
- Du-Bois Reymond (1875), Darboux (1875): For kontinuerlige f får vi et veldefinert integralbegrep.
- Senere: Fungerer også for ikke-kontinuerlige funksjoner, men konsepten er ikke mektig nok. ($\rightarrow$ Lebesgue integral (1902))

Hva er forholdet mellom derivasjon og integrasjon?

Analysens Fundametalteorem

Teorem I

Det holder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)\,.$$

Riktig? Riktig nok for oss!

TEOREM

La $F(x)$ være en anti-derivert til $f(x)$ på intervallet $[a,b]$. Da holder

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Integrasjonsregler

Spesielle Integrasjonsregler

(i) $\int 0 \mathrm{d}x = c$

(ii) $\int x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} x^{m+1} + c$

(iii) $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$

(iv) $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + c$

(v) $\int \alpha f(x) \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f(x) \mathrm{d}x$

(vi) $\int f(x) + g(x) \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x + \int g(x) \mathrm{d}x$

(vii) $\int f \cdot g' \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g \mathrm{d}x \quad \Big((f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \Big)$

(viii) $\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \mathrm{d}x = f(g(x)) + c$

$\Big((f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \Big)$

Integrasjon er ikke like 'automatisk' som derivasjon.

$\rightarrow$ Klasser av integrerbare funksjoner

Substitusjon

Kort, men utfordrendere: $\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \mathrm{d}x = f(g(x))$

Eksempel

Finn én anti-derivert til $f(x) = \tan x$.

$$I = \int \tan x \mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \mathrm{d}x$$

La $g := \cos(x)$ med $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = -\sin(x)$ eller $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}g}{-\sin x}$

$$= \int \frac{\sin x \mathrm{d}g}{(-\sin x) \cdot g} = -\int \frac{\mathrm{d}g}{g} = -\ln|g| = -\ln|\cos(x)|$$