NTNU | Kunnskap for en bedre verden

BRUKERKURS MATEMATIKK B — MA0002

Plenmumsregning 1

M. A. Köbis
markus.kobis@ntnu.no

20. 04. 2022

Format

Læreboka 8.1.4

Løs bare-tid differensialligningen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

med $y(0) = 1$.

Eksamen V21, oppgave 2

En gruppe biologer har observert en populasjon løver i jungelen. De har kommet fram til konklusjonen at antallet individer $N(t)$ etter tid $t > 0$ (gitt i år) er gitt av differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{N(t)}{1000} \cdot (500 - N(t)) \ .$$

(a) Finn $N(t)$ gitt at populasjonen er $N(0) = 50$ ved tid $t = 0$.

(b) Hva sier differensialligningen om populasjonens vekstrate per løve? Hva er bæreevnen til populasjonen?

(c) Finn likevektspunktene til modellen og klassifiser dem etter stabilitiet.

(d) Noen av biologene fra gruppa mener at modellen ikke er realistisk: Hvis antallet løver $N(t)$ er veldig lite, vil populasjonen minke siden det ikke vil være nok partnere for reproduksjon. Kan du foreslå en variant av differensialligningen overfor slik at viss antallet løver er mindre enn 40, så vil antallet løver gå mot null? (Du trenger ikke løse differensialligningen du foreslår.)

Eksamen V20, oppgave 3

Et basseng inneholder 3000 liter saltvann med en konsentrasjon på 35 gram salt per liter vann. Så fylles det på bassenget en saltvannsløsning med en konsentrasjon på 12 gram salt per liter vann, samtidig som det tappes væske ut av bassenget. Innstrømningsrate og utstrømningsrate er begge konstant lik 10 liter per minutt. Anta at innholdet i tanken er godt blandet hele tiden.

(a) La $S(t)$ betegne saltmengden i kg i bassenget ved tiden t, og forklar hvorfor differensiallikningen med initialbetingelsen gitt nedenfor vil være en modell for situasjonen beskrevet ovenfor.

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = 0,12 - \frac{S}{300}\,, \quad S(0) = 105\,.$$

(b) Finn et eksplisitt uttrykk for $S(t)$, og begrunn matematisk hvorfor den teknikken du bruker virker (dvs. forklar underveis hva som motiverer de stegene du tar for å løse problemet). Beregn hva saltkonsentrasjonen i bassenget vil være etter 2 timer.

(c) Tenk deg en situasjon som er lik den som er gitt i begynnelsen av oppgaven. Nå skal du imidlertid endre inn- og utstrømningsraten (som fremdeles skal være like) slik at saltkonsentrasjonen i bassenget vil være 25 gram salt per liter vann etter 2 timer. Hva må inn- og utstrømningsraten være for at dette skal inntreffe?

Læreboka 8.1.23

Anta at $L(t)$ er lengden til en fisk ved tidspunktet t, gitt i måneder, og at den vokser ift. von Bertalanffy ligning:

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot (L_\infty - L(t)) \text{ med } L(0) = 1\,.$$

hvor k og L_∞ er positive konstanter. En studie viste at den asymptotiske lengden av fisken er 123 og at det tar 27 måneder for den å nå halve dens asymtptotisk lengde.

(a) Finn konstantene k og L_∞.

(b) Finn lengden av fisken etter 10 måneder.

(c) Når vil fisken nå 90% av dens asymptotiske lengde?

Plenumsregning 1

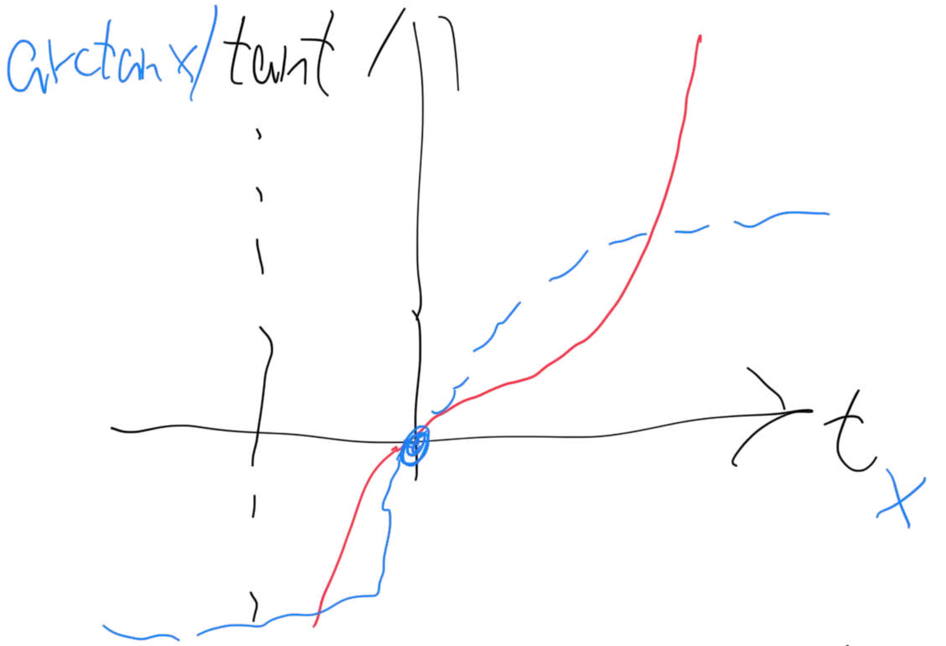
- **Spørsmål**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$$

$$\int 1\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \cancel{\tan^{-1} x}$$

$$\Rightarrow y = \arctan x + C$$

$$y(0) \overset{!}{=} 1 = \arctan 0 + C$$



$$\overset{!}{=} 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Løsning: $\underline{y(x) = \arctan \overline{x+1}}$

8.1.23 $L(t)$ ... lengden til fisken

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = k \cdot (L_\infty - L(t))}$$

$$L(0) = 1.$$

asymptotisk lengde:

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} L(t) = 123}$$

halve lengde etter 27 mår

$$L(2\cancel{7}) = \frac{123}{2}$$

(b) løs diff.-lign.:

$$\frac{dL}{dt} = k\cdot(L_\infty - L) \qquad \Big|\cdot dt \quad \Big|\frac{1}{L_\infty - L}$$

$$\int \frac{1}{L_\infty - L}\, dL = \int k\, dt$$

$$\boxed{-\ln|L_\infty - L| = k\cdot t + C_1}$$

$$\ln|L_\infty - L| = -k\cdot t - C_1 \qquad \Big| e^{(\cdot)}$$

$$|L_\infty - L| = e^{-k\cdot t - C_1} = e^{-k\cdot t}\cdot e^{-C_1}$$

$$L_\infty - L = \cancel{\pm}\, e^{-k\cdot t}\cdot C_2 \qquad \Big| +L \quad \Big| -C_2\cdot$$

$$\boxed{L(t) = L_\infty - C_2\cdot e^{-k\cdot t}}$$

(a) ? k, L_∞ ?

→ $L(0) = 1$

→ $\lim_{t\to\infty} L(t) = 127$

→ $L(27) = \frac{127}{2}$

$$\lim L(t) = \lim L_\infty - C_2\cdot e^{-k\cdot t} = L_\infty$$

$\lim_{t \to \infty} L(t) = \lim_{t \to \infty}$ ... $= 123$

$$L(0) = 123 - C_2 \cdot e^{-k \cdot 0} = 123 - C_2 = 1$$

$$\Rightarrow C_2 = 122$$

$$L(27) = \frac{123}{2} = 123 - 122 \cdot e^{-k \cdot 27}$$

$$122 \cdot e^{-k \cdot 27} = 123 - \frac{123}{2}$$

$$122 \cdot e^{-k \cdot 27} = \frac{123}{2} \quad \Big| /122$$

$$e^{-k \cdot 27} = \frac{123}{2 \cdot 122} = \frac{123}{244}$$

$$-k \cdot 27 = \ln\left(\frac{123}{244}\right)$$

$$k = \frac{-\ln\left(\frac{123}{244}\right)}{27} \approx 0.0254$$

b) $L(10) = L_\infty - C_2 \cdot e^{-k \cdot 10}$

$$\approx 123 - 122 \cdot e^{-10 \cdot 0.0254}$$

$$\hat{=}\ 28{,}37$$

(c) $L(t^*) \overset{!}{=} 0{,}9 \cdot L_\infty = 0.9 \cdot 123$

$$= \frac{1107}{10}$$

$$= L_\infty - C_2 \cdot e^{-k \cdot t^*} \qquad \frac{\ln\left(\frac{123}{244}\right)}{27}$$

$$= 123 - 122 \cdot e^{\frac{\ln\left(\frac{123}{244}\right)}{27}}$$

$\cancel{122 \cdot e^{(\ldots)}}$ $\quad = \ln\left(\frac{123 - \frac{1107}{10}}{122}\right)$

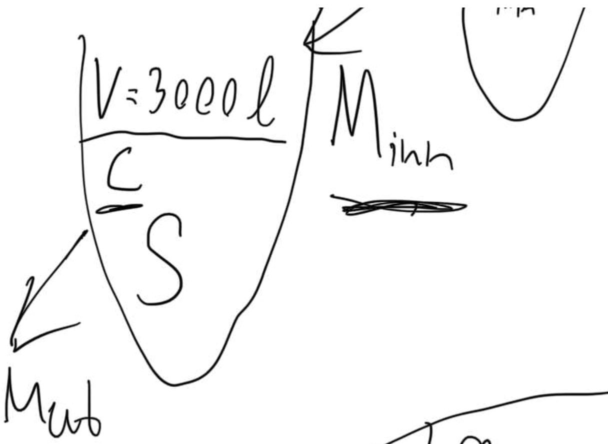
k

$$\frac{\ln\left(\frac{123}{244}\right)}{27} \cdot t^* = k$$

$$t^* = \ldots \hat{=}\ 90 \text{ mån}$$

VZO Oppg. 3

Kilar 1



$$g = \cancel{l} \cdot \frac{kg}{\cancel{l}}$$

$$\boxed{S = V \cdot c}$$

$$c(0) = 0{,}035 \ \frac{kg}{l}$$

$$C_{inn} = 0{,}012 \ \frac{kg}{l}$$

$$M_{inn} = 10 \ \frac{l}{min}$$

$$M_{ut} = 10 \ \frac{l}{min}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{dt} = Salt_{inn} - Salt_{ut}$$

$$= M_{inn} \cdot C_{inn} - M_{ut} \cdot c$$

$$= 10 \cdot 0{,}012 - 10 \cdot \frac{S}{V}$$

$$= 0{,}12 - \frac{10}{3000} \cdot S$$

$$\frac{\cancel{l}}{min} \cdot \frac{kg}{\cancel{l}}$$

$$= 0{,}12 - \frac{1}{300} \cdot S$$

$$S(0) = V \cdot c(0) = 3000 \cdot 0{,}035$$
$$= \underline{\underline{105}}$$

(b) Lös i.V.p.

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}12 - \frac{S}{300}, \quad S(0) = 1$$

$$\frac{300 \cdot 0{,}12 - S}{300} = \frac{36 - S}{300} \quad \Big| \cdot dt \quad \Big| / 36 - S$$

$$\int \frac{1}{36-S}\, dS = \int \frac{1}{300}\, dt$$

$$\cancel{+} \ln|36-S| = \frac{-t}{300} \cancel{+} C_1 \quad \Big| \exp($$

$$|36 - S| = e^{-\frac{t}{300}} \cdot e^{-C_1} \pm C_2$$

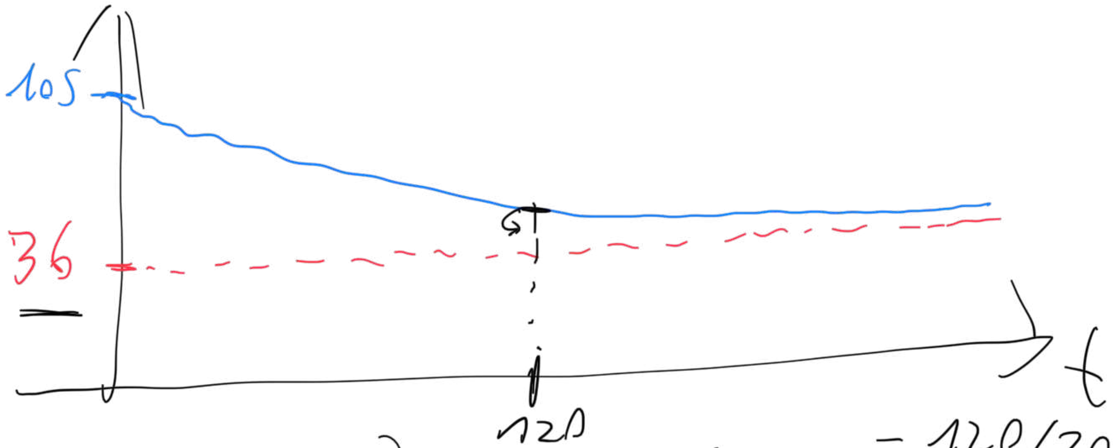
$$36 - S = C_2 \cdot e^{-t/300}$$

$$S = 36 - C_2 \cdot e^{-t/300}$$

$$S(0) = 105 = 36 - C_2 \cdot e^{-0}$$
$$= 36 - C_2$$

$$C_2 = 36 - 105 = -69$$

$$S(t) = 36 + 69 \cdot e^{-t/300}$$



$$S(120) = 36 + 69 \cdot e^{-120/300}$$

$$\approx 82{,}25 \text{ kg}$$

$82{,}25$ kg $\rightsquigarrow c(120) \approx 0{,}0\ldots$

$$S = V \cdot c \Rightarrow c = \frac{S}{V}$$

(c) $S_2(t)$

$$S_2(120) \overset{!}{=} 75 = 0{,}025 \cdot 3000$$

$$25\ g/l = 0{,}025\ \frac{kg}{l}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = S_{inn}^{(2)} - S_{ut}^{(2)}$$
$$= M_{inn} \cdot C_{inn} - \underline{M_{ut}} \cdot C$$
$$= M_{inn}\left(c_{inn} - \frac{S_2}{V}\right)$$
$$= \underline{M_{inn}}\left(0{,}012 - \frac{S_2}{3000}\right)$$

$\boxed{V21\ e2}$

(a) $$\frac{dN}{dt} = \frac{N(t)}{1000} \cdot (500 - N(t))$$

$$N(0) = 50$$

$$\int \frac{dN}{N\cdot(500-N)} = \int \frac{1}{1000}\,dt$$

$$= \frac{t}{1000} + C_1$$

$$\frac{1}{N(500-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{500-N}$$

$$\frac{1}{500-N} = A + \frac{N\cdot B}{500-N} \quad | N=$$

$$\boxed{\frac{1}{500} = A} + 0$$

$$\frac{1}{N} = \frac{(500-N)A}{N} + B \quad | N=500$$

$$\frac{1}{500} = 0 + B \Rightarrow B = \frac{1}{500}$$

$$\frac{t}{1000} + C_1 = \int \frac{dN}{N(500-N)} = \int \frac{1}{500\cdot N} + \frac{1}{500(50}$$

$$= \frac{1}{500}\cdot \ln N \mp \frac{1}{500}\cdot \ln|500-$$

$$\int \frac{1}{500\cdot N}\,dN = \frac{1}{500}\cdot\int\frac{dN}{N}$$

$$= \frac{1}{500}\left(\ln N \mp \ln(500-N\right.$$

$$= \frac{1}{500}\cdot\ln\left(\frac{N}{500-N}\right)$$

$\vdots$

$$|K-y| = e^{\alpha\cdot t}\cdot e^{C_1}$$

$$\pm(K-y) = e^{\alpha\cdot t}\cdot e^{C_1}$$

$$K-y = \pm\, e^{\alpha\cdot t}\cdot e^{C_1}$$

$$C_2$$