Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Brukerkurs matematikk B
Vår 2022

Oppgavesett 12

Vanskelighetsgrad: Enklere (mest regning)

1 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = 2x\mathrm{e}^{-\sin x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

2 Anta at en populasjon vekser i henhold til logistisk likning med indre vesktrate $r = 1.5$. Anta at bæreevne til populasjon er $K = 100$.

(a) Finn differensiallikningen som beskriver veksthastighet til denne populasjonen.

(b) Finn likevektsløsningene til denne differensiallikningen. Tegn og bruk grafen til å drøfte stabiliteten til likevektsløsningene.

(c) Beregn egenverdiene (se def. i boken) til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene. Sammenlign svarene ift. punkt (b)

3 Anta at en populasjon vokser i henhold til logistisk likning med indre vekstrate $r = 2$. Anta at $N(0) = 10$.

(a) Finn bæreevnen K hvis populasjon vokser mest når populasjonsstørrelsen er 1000. *Hint*: Vis at grafen til dN/dt som en funksjon av N har et maksimum ved $K/2$.

(b) Hvis $N(0) = 10$, hvor lenge vil det ta før populasjon når 1000?

(c) Finn $\lim_{t\to\infty} N(t)$.

Vanskelighetsgrad: Medium

4 Denne oppgaven handler om å finne uttrykk for temperaturen i vannet i to ulike termokanner (Sarek og Eva Solo) som funksjoner av tiden (i timer) etter påfylling av kokende vann. Temperaturen i vannet i de to kannene ble målt i flere tidspunkter etter påfylling (se Tabell 1). Temperaturen i rommet der kannene var plassert var $24,2\ ^\circ\mathrm{C}$.

Newtons avkjølingslov sier at dersom vi plasserer et objekt i et rom med konstant temperatur, så vil endringsraten til temperaturen i objektet være proporsjonal med differansen mellom temperaturen i objektet og temperaturen i rommet.

Tid etter påfylling (timer)	Temperatur i vannet Sarek (°C)	Temperatur i vannet Eva Solo (°C)
0	94.3	94.3
1	92.6	89.0
2	90.3	85.8
3	88.9	83.7
5	85.9	78.7
7	82.9	74.6
11	77.8	67.8
12	76.5	66.5
53	47.5	37.0
75	39.9	32.1
96	34.8	28.9
192	24.2	24.2

Tabell 1: Data for de to termokannene

(a) Bruk informasjonen som er gitt til å sette opp en differensiallikning som representerer forholdet mellom endringsraten til temperaturen og den nåværende temperaturen for de to termokannene. Løs likningene.

(b) Tegn grafene til funksjonene fra (a) i samme koordinatsystem (potensielt ved hjelp av GeoGebra). Sammenlikn resultatene og kommenter.

(c) Gi en vurdering av modellene du har funnet i forhold til dataene fra målingene.

Vanskelighetsgrad: Mer krevende

5 Se den enkle modellen for epidemi i seksjon 8.3.1 i boka.

(a) Del ligning (8.75) med (8.74) for å vise at når $I > 0$, så er:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \frac{a}{b}\frac{1}{S} - 1.$$

Vis også at når $R(0) = 0$, $I(0) = I_0$, og $S(0) = S_0$, så er løsningen på ligningen over slik at

$$I(t) = N - S(t) + \frac{a}{b}\ln\frac{S(t)}{S_0},$$

der $I(t)$ er antall smittede, N er antallet i befolkningen og $S(t)$ er antallet som er mottakelige ved tiden t.

(b) Har at $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = bSI - aI$, slik at hvis $S(0) > a/b$, så er $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$. Men siden $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$, så finnes det en $t > 0$ der $I(t)$ er maksimal.

Vis at antallet mottakelige (S) når $I(t)$ er maksimal er $S = a/b$.

(c) I (a) uttrykket du $I(t)$ som en funksjon av $S(t)$. Bruk resultatet fra (b) til å vise at det maksimale antallet smittede er gitt som

$$I_{max} = N - \frac{a}{b} + \frac{a}{b}\ln\frac{a/b}{S_0}$$

(d) Bruk resultatet i (c) til å vise at I_{max} er en avtagende funksjon med hensyn på $\frac{a}{b}$ når $\frac{a}{b} < S_0$. Bruk dette til å forklare hvordan a og b beskriver alvorligheten av sykdommen.

Gir dette mening?

Innleveringsfrist: Mandag, 25. april 2022 (digitalt som én pdf via Blackboard)