Brukerkurs matematikk B

Vår 2022

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavesett 11

Oppvarmingsoppgaver (frivillig, trenger ikke leveres)

$\boxed{1}$ Løs differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 3$$

(a) som en førsteordens lineær differensialligning.

(b) som en separabel differensialligning.

(c) Finn den unike løsningen til differensialligningen som har en graf som går igjennom punktet $(x, y) = (0, -1)$.

$\boxed{2}$ Løs initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\cos x = 2x\mathrm{e}^{-\sin x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

Vanskelighetsgrad: Enklere (kun regning)

$\boxed{3}$ Vis at

$$y(t) = \frac{M}{1 - \left(1 - \frac{M}{y_0}\right) \cdot \mathrm{e}^{M \cdot k \cdot t}}$$

er en løsning til initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot y(t) \cdot (y(t) - M)\ , \quad y(0) = y_0$$

for konstanter $k < 0$, $M > 0$.

$\boxed{8.1.34}$ Løs differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3 - y(x))(2 + y(x)).$$

Vanskelighetsgrad: Medium (Bruk innhold fra et annet kapittel, anbefalt som eksamensforberedelse)

$\boxed{5}$ Vis at

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\cdot t}}$$

løser den såkalte diffusjonsligningen

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \,.$$

Skissér løsningen for en fiksert verdi av $t > 0$ som en funksjon av x.

Hint: Diffusjonsligningen «leses» som en ordinær differensialligning: «Vanlige» deriverte «$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$» byttes her med partiellderiverte.

Vanskelighetsgrad: Mer krevende (Flere aspekter sammen)

$\boxed{6}$ Gitt initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = 2 \cdot x \cdot y(x)\,, \quad y(0) = 1\,.$$

(a) Finn løsningen $y(x)$.

(b) Bruk analysens fundamentalteorem for å få et uttrykk

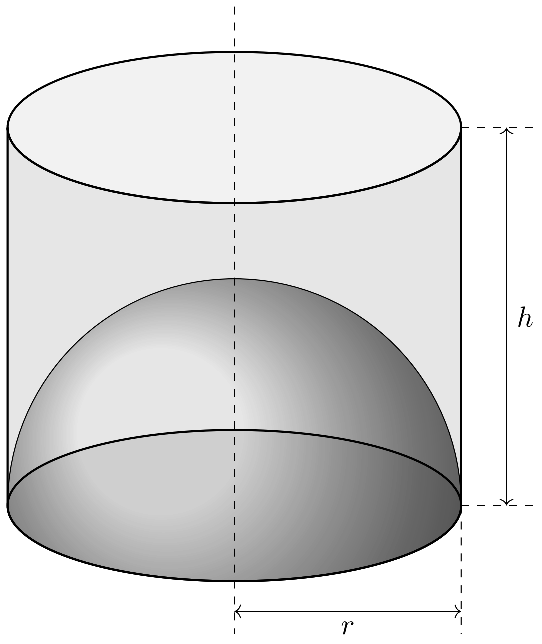
$$y(x) = \begin{array}{c}\text{«noe som kan inneholde et integral fra } t = 0 \text{ til } x \\ \text{over noe som kan være avhengig av } y(t)\text{»}\end{array} \,.$$

(c) Anta at vi vil bestemme løsningen *iterativt*, dvs. ved å begynne med en grov antakelse som skal forbedres etter hvert. Her starter vi med $y(x) \approx y_0(x) = 1 + x$. Bruk resultatet fra (b) og $y_0(x)$ for å regne ut en ny approximasjon (med navn $y_1(x)$). Bruk så y_1 og (b) for å finne en enda bedre approskimasjon $y_2(x)$.

(d) Skisser løsningen $y(x)$ sammen med approksimasjonene $y_0(x)$, $y_1(x)$, og $y_2(x)$ i et koordinatsystem for $x \in [-1, 1]$.

Hint: Metoden vi «oppfinner» her kalles «Picard iterasjon».

$\boxed{7}$ Oppgaven er å skrive opp et likningssystem slik at man kan bestemme radius r og høyden h slik at volumet til en sylinder-aktig beholder blir maksimalt hvis overflatet er fiksert til et positivt tall A (Du skal kun skrive opp systemet, du trenger ikke løse det). Særegenheten med sylinderen (se bildet) er at bunnen er en halv kule. Bruk Lagrange multiplaktorer for å finne systemet.



Innleveringsfrist: Søndag, 3. april 2022 (digitalt som én pdf via Blackboard)