Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavesett 6

$\boxed{1}$ Forklar med egne ord i deloppgave (a) og (b). Du kan også bruke tegninger.

(a) Hva er en egenvektor?

(b) Hva er en egenverdi?

$\boxed{2}$ Finn egenvektorer og egenverdier til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3}$ Er $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en egenvektor til matrisen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$? Hvorfor/hvorfor ikke?

$\boxed{4}$ La $\mathbf{A}$ være en $n \times n$ matrise, og $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ en egenvektor av $\mathbf{A}$ med tilhørende egenverdi $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Hvilke av de følgende påstandene er sanne, og hvilke er usanne?
2. Hvorfor/hvorfor ikke?

(a) $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \mathbf{A}$

(b) $(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \cdot \boldsymbol{x}$

(d) $\det(\lambda \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$

(e) Multiplikasjon med $\boldsymbol{x}$ skalerer $\mathbf{A}$ med en faktor λ

(f) Multiplikasjon med $\mathbf{A}$ skalerer $\boldsymbol{x}$ med en faktor λ

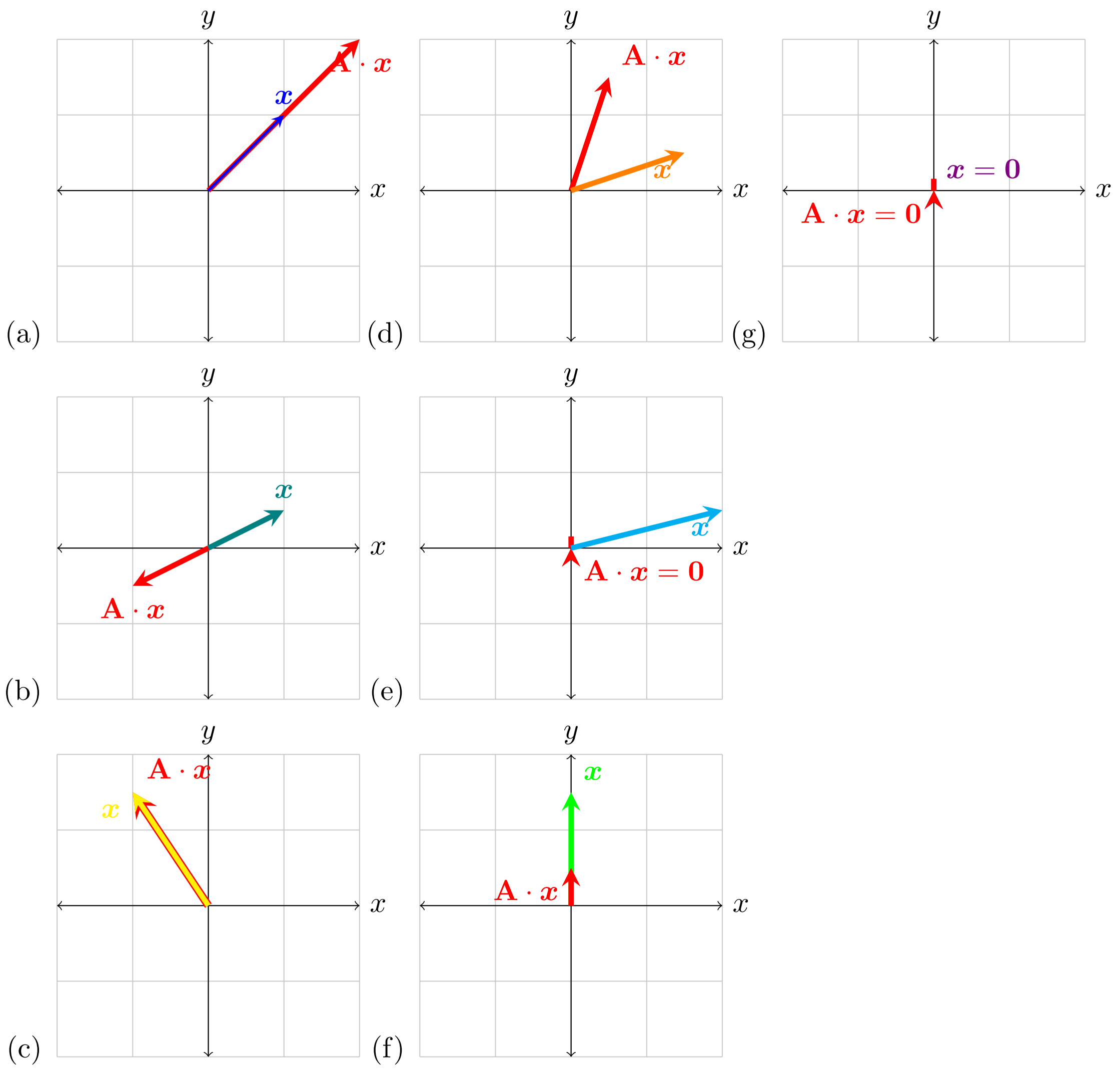
(g) $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x}$ kan ikke være $\mathbf{0}$

(h) λ kan ikke være 0

(i) $\boldsymbol{x}$ kan ikke være $\mathbf{0}$

5 La $\mathbf{A}$ være en 2×2 matrise og $\boldsymbol{x}$ en to-dimensjonal vektor. For tilfellene (a) til (g), svar på følgende spørsmål:

1. Er $\boldsymbol{x}$ en egenvektor for $\mathbf{A}$?
2. Hvorfor/hvorfor ikke?
3. Hvis $\boldsymbol{x}$ *er* en egenvektor, hva tror du egenverdien $\lambda \in \mathbb{R}$ er?



6 La

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ er egenvektorer til matrise A og at $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$ er lineært uavhengige.

(b) Representer $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ som lineær kombinasjon av $\boldsymbol{u}_1$ og $\boldsymbol{u}_2$.

(c) Bruk resultater fra (a) og (b) for å beregne $A^{20}\boldsymbol{x}$.

Innleveringsfrist Søndag 27. februar (digitalt som én pdf via Blackboard)