MA0002 Brukerkurs Matematikk B
Vår 2022

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Oppgavesett 2

$\boxed{1}$ Bruk polynomdivisjon for å skrive

$$f(x) := \frac{3x^3 + 5x - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

som en sum av et polynom og en rasjonal funksjon $\frac{P}{Q}$ der $\deg P \leq \deg Q$. ($\deg P$ beskriver graden til polynomet P, fra engelsk degree.)

$\boxed{2}$ Evaluér integralet $I := \int f(x)\,\mathrm{d}x$ der

$$f(x) := \frac{4x^2 - x - 1}{(x+1)^2(x-3)}$$

ved hjelp av delbrøkoppspaltning.

$\boxed{3}$ Evaluér integralet

$$\int \frac{4}{(1-x)(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{4}$ Løs initialverdiproblemet (IVP)

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3t+1}, \qquad s(0) = 1.$$

$\boxed{5}$ Oppgaven er å bestemme

$$I = \int_0^{\pi/2} h(x)\,\mathrm{d}x$$

med

$$h(x) = \frac{(\sin x)^2}{(1 + \sin x + \cos x)^3}\,.$$

(a) For å bruke substitusjonen $u = \tan(x/2)$ i regningen, må vi finne ut hvordan $\sin x$, $\cos x$ og $\mathrm{d}x$ kan utrykkes med bare u. Finn disse utrykkene. (**Hint:** Søk på ”universalsubstitusjoneller ”Weierstrass substitusjon”.)

(b) Bruk universalsubstitusjonen for å skrive I som et integral med variablen u. **Hint:** Løsningen er $I = \int_0^1 \frac{u^2}{(u+1)^3}\,\mathrm{d}u$.

(c) Bruk resultatet fra (b) for å bestemme I.

6 En koloni med firfisler består av tre aldersgrupper: nullåringer, ettåringer og toåringer. Vi betrakter kun dyr av hunkjønn. Vanligvis får firfislene ingen unger i løpet av det første året. En femtedel overlever sitt første leveår. Som ettåringer får de i gjennomsnitt to unger. Halvparten av firfislene overlever sitt andre leveår. Som toåringer får de i gjennomsnitt b unger, da b er et gitt reellt tall. Da observasjonene av denne kolonien startet, bestod den av 240 nullåringer, 400 ettåringer og 320 toåringer.

Regn ut hvor mange medlemmer av hver aldersgruppe lever i kolonien etter ett, to, og tre år.

7 En populasjon av alger i en sjø måles med utstyr som bare estimeres mengden av signalstoff som algene gi av når de yngler. Dermed er det bare mulig å bestemme endringsraten, ikke mengden av algene selv.

La $m(t)$ betegne mengden av alger i denne sjøen ved tidspunkt t og anta at det ble målet en endringsrate (som kan tilnærmes som)

$$m'(t) = \frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{4 \cdot t}{5 + t^2} .$$

Anta videre at det ble tatt en måling av alge-mengden før eksperimentet startet som ga

$$m(0) = 10.$$

Bestem mengden $m(5)$ for disse antakelsene.

Hint: Analysens fundamentalteorem.

Innleveringsfrist: Søndag, 30. januar (digitalt som én pdf via Blackboard)