EKSAMEN MA0002, 07. MAI 2020 – LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1 (30 %)

Alle utregninger skal tas med i besvarelsen.

En koloni med firfisler består av tre aldersgrupper: nullåringer, ettåringer og toåringer. Vi betrakter kun dyr av hunkjønn. Vanligvis får firfislene ingen unger i løpet av det første året. En femtedel overlever sitt første leveår. Som ettåringer får de i gjennomsnitt 2 unger. Halvparten av firfislene overlever sitt andre leveår. Som toåringer får de i gjennomsnitt b unger. Da observasjonene av denne kolonien startet, bestod den av 240 nullåringer, 400 ettåringer og 320 toåringer.

a) Sett opp en Lesliematrise L som beskriver utviklingen av denne kolonien.

Løsning:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 2 & b \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vi ønsker å finne ut hva som vil skje med firfislekolonien i det lange løp. Et matematikkprogram for behandling av matriser er brukt i beregningene nedenfor.

Først antar vi at $b = 3$ (dvs. at toåringene får 3 unger i gjennomsnitt). Dette gir følgende resultat:

$$L^{50} \begin{bmatrix} 240 \\ 400 \\ 320 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deretter antar vi at $b = 9$ (dvs. at toåringene får 9 unger i gjennomsnitt). Dette gir følgende resultater:

$$L^{40} \begin{bmatrix} 240 \\ 400 \\ 320 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 94\,790 \\ 17\,185 \\ 7\,798 \end{bmatrix} \text{ og } L^{50} \begin{bmatrix} 240 \\ 400 \\ 320 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 252\,130 \\ 45\,730 \\ 20\,731 \end{bmatrix}.$$

Gi en tolkning av resultatene for $b = 3$ og $b = 9$ med tanke på hva som vil skje med firfislekolonien i det lange løp.

Løsning:

Når $b = 3$ vil kolonien dø ut, og når $b = 9$ vil kolonien teoretisk vokse mot uendelig i det lange løp. (Her har vi ikke tatt i betraktning tetthetsregulerende faktorer som mattilgang, plassmangel, stress, sykdommer, eller rovdyr).

c) Det viser seg at det finnes en spesifikk fødselsrate for toåringene (kall den *b*) som gjør at kolonien stabiliserer seg i det lange løp. Finn denne verdien av *b*, og begrunn matematisk hvorfor den teknikken du bruker virker (dvs. forklar hva som motiverer de stegene du tar for å løse problemet).

Løsning:

Det at kolonien stabiliserer seg betyr at Leslie-matrisen har en dominant egenverdi som er lik 1. En egenverdi λ med tilhørende egenvektor $\overline{u}$ oppfyller denne likheten $L\overline{u} = \lambda\overline{u}$. Vi må altså finne en verdi for parameteren *b* slik at matrisen *L* som har egenverdi $\lambda = 1$. Dette betyr at vi må løse likningen $L\overline{u} = \overline{u}$, der $\overline{u}$ er egenvektoren tilhørende $\lambda = 1$.

Dette gjør vi slik: $L\overline{u} = \overline{u} \iff L\overline{u} - \overline{u} = \overline{0} \iff L\overline{u} - I_3\overline{u} = \overline{0} \iff (L - I_3)\overline{u} = \overline{0}$, der I_3 er lik identitetsmatrisen av størrelse 3. Fordi $\overline{u} \neq \overline{0}$ (den er en egenvektor), vil løsningen av matriselikningen $(L - I_3)\overline{u} = \overline{0}$ inntreffe når determinanten til matrisen $L - I_3$ er lik 0 (fordi $det(L - I_3)\overline{u} \neq 0$ medfører at $\overline{u} = \overline{0}$).

Vi har at $L - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & b \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$. Vi finner altså *b* ved å løse likningen:

$$det \begin{bmatrix} -1 & 2 & b \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} = 0 \iff -1 + \frac{2}{5} + \frac{1}{10}b = 0 \iff \underline{b = 6}.$$

(At vi har begrunnet matematisk de stegene vi har tatt, gjelder som begrunnelse for at teknikken virker).

I oppgave d) og e) skal du bruke den verdien av *b* som du fant i c).

d) Finn den stabile distribusjonen av firfisler som vil inntreffe i det lange løp.

Løsning:

Finner egenvektoren $\overline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ tilhørende egenverdien $\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 6\\ \frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}\Leftrightarrow (L-I_3)\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 6\\ \frac{1}{5} & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Vi løser denne matriselikningen ved å foreta elementære radoperasjoner på matrisen $L-I_3$:

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & 6\\ \frac{1}{5} & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{array}{c}R1\\ R2\\ R3\end{array} \qquad R1 \longrightarrow -R1$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ \frac{1}{5} & -1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{array}{c}R4\\ R2\\ R3\end{array} \qquad R2 \longrightarrow R2-\frac{1}{5}R4$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{6}{5}\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{array}{c}R4\\ R5\\ R3\end{array} \qquad R5 \longrightarrow -\frac{5}{3}R5$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}\begin{array}{c}R4\\ R6\\ R3\end{array} \qquad R3 \longrightarrow R3-\frac{1}{2}R6$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & -6\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{array}{c}R4\\ R6\\ R7\end{array} \qquad R4 \longrightarrow R4+2R6$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -10\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Den siste matrisen er på redusert trappeform, og løsningen av matriselikningen er dermed gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ som betyr at } \begin{aligned} u_1 &= 10u_3 \\ u_2 &= 2u_3 \\ 0u_3 &= 0 \end{aligned}$$

Vi setter $u_3 = t$ og får at $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vi velger $t = 1$ og får egenvektoren $\overline{u} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (tilhørende egenverdien $\lambda = 1$).

Tolkningen er at denne vektoren angir den stabile distribusjonen av firfisler i de tre aldersgruppene. Det betyr at andelen nullåringer stabiliseres på $\frac{10}{13}$, andelen ettåringer stabiliseres på $\frac{2}{13}$ og andelen toåringer stabiliseres på $\frac{1}{13}$.

e) Med den startpopulasjonen som er oppgitt i ovenfor, vil kolonien stabilisere seg på totalt 2 080 firfisler. Finn ut hvor mange firfisler det vil være i hver aldersgruppe etter at kolonien har stabilisert seg.

Løsning:

Med en totalkoloni på 2 080 firfisler, vil det være:

$\frac{10}{13}$ av 2 080, altså 1 600 nullåringer,

$\frac{2}{13}$ av 2 080, altså 320 ettåringer,

$\frac{1}{13}$ av 2 080, altså 160 toåringer.

Oppgave 2 (40 %)

Alle utregninger skal tas med i besvarelsen.

Betrakt funksjonen $f(x, y) = -x^3 + y^2 + x$ på det lukkede og begrensede området

$$D_f = \{(x, y): -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}.$$

a) Finn gradientvektoren $\overline{\nabla} f(x, y)$.

Løsning:

Gradientvektoren $\overline{\nabla} f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x^2+1 \\ 2y \end{bmatrix}$.

b) I hvilken retning øker *f* raskest i punktet $(-1,0)$? Regn ut størrelsen på denne økningen.

Løsning:

I et vilkårlig punkt (x_0, y_0) vil en deriverbar funksjon $f(x_0, y_0)$ øke raskest i retning av gradientvektoren i dette punktet. Altså vil *f* øke raskest i retning av $\overline{\nabla} f(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ i punktet $(-1,0)$. Økningen i dette punktet (i retning av gradientvektoren) er lik lengden av gradientvektoren i punktet, altså lik $\left\| \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-2)^2} = \underline{2}$.

c) Finn den retningsderiverte til *f* i punktet $(-1,0)$ i retning av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Gi en geometrisk tolkning av svaret.

Løsning:

Vi skal finne den retningsderiverte til *f* i punktet $(-1,0)$ i retning av vektoren $\overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Først må vi normalisere $\overline{u}$ (det betyr å sørge for at vektoren har lengde lik 1). Kall den normaliserte vektoren for $\overline{v}$. Vi har at $\overline{v} = \frac{\overline{u}}{|\overline{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da vil den retningsderiverte til $f(x,y)$ i punktet $(-1,0)$ i retning av $\overline{v}$ være gitt ved dette skalarproduktet (også kalt prikkproduktet)

$$D_{\overline{v}} f(1,1) = (\overline{\nabla} f(1,1)) \cdot \overline{v},$$

og vi får at $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-2) = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \underline{-\sqrt{2}}$.

Geometrisk tolkningen av den retningsderiverte: Den retningsderiverte sier noe om hvor stor helning det er i punktet $(-1,0)$ langs den stien (på flaten i $\mathbb{R}^3$) som har retning bestemt av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Denne stien er en kurve med stigningstall lik $-\sqrt{2}$ i punktet $(-1,0)$. Hvis vi ser for oss at grafen til *f* beskriver et terreng som vi beveger oss i, bærer det nedover i terrenget i det aktuelle punktet, i den angitte retningen.

d) Finn og klassifiser eventuelle kritiske punkter for *f* på definisjonsområdet. Begrunn løsningen.

Løsning:

Vi finner og klassifiserer eventuelle kritiske punkter for *f* på definisjonsområdet. Kritiske punkter inntreffer når gradientvektoren er lik nullvektor. Fra a) har vi at

$\overline{\nabla} f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x^2+1 \\ 2y \end{bmatrix}$. Vi løser likningen $\begin{bmatrix} -3x^2+1 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ og $y = 0$.

Dvs. vi har to kritiske punkter: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$. Vi klassifiserer dem ved hjelp av determinanten til Hessematrisen og andreordens partiellderiverttesten:

Vi regner ut at $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =- 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$.

Analyse av det første kritiske punktet, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$:

Hessematrisen til *f* i $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ er gitt ved:

$$H\,f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det Hf\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = 4\sqrt{3} > 0$. Videre er $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = 2\sqrt{3} > 0$. Dette medfører ifølge andreordens partiellderiverttesten at punktet $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ er et <u>minimumspunkt</u> (hvorvidt det er lokalt eller globalt avgjøres ved at vi sammenlikner dets funksjonsverdi med de andre ekstremalpunktenes funksjonsverdier, når vi har funnet disse). Vi har at $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx - 0{,}385$.

Analyse av det andre kritiske punktet, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$:
Hessematrisen til *f* i $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ er gitt ved:

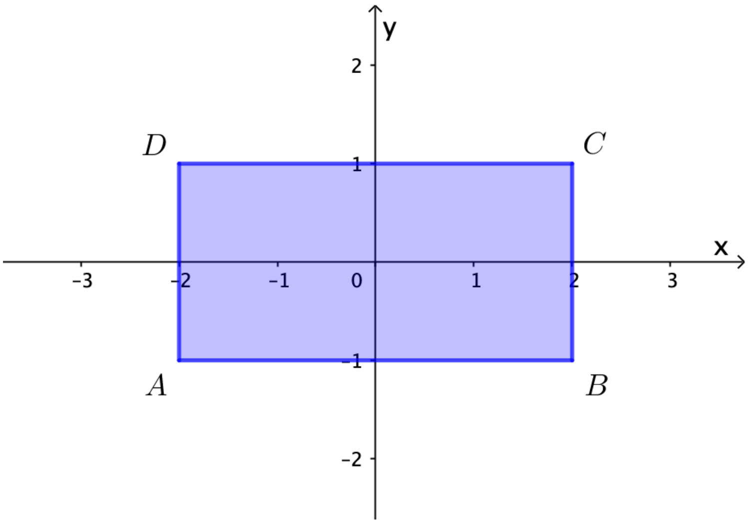
$$H\,f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$\det Hf\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = -4\sqrt{2} < 0$. Dette medfører ifølge andreordens partiellderiverttesten at punktet $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ er et <u>sadelpunkt</u>. Vi har at $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}385$.

e) Finn globale maksimums- og minimumspunkter for *f* på definisjonsområdet. Begrunn løsningen.

Løsning:

Ekstremalverdi-teoremet i $\mathbb{R}^2$ sier at en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset området har både et globalt minimums- og et globalt maksimumspunkt på definisjonsområdet (det kan ha flere med samme verdi). Vi skal nå finne kandidater til disse ekstremalpunktene på randen av definisjonsområdet som er et rektangel i *xy*-planet med hjørner $A(-2,-1), B(2,-1), C(2,1)$ og $D(-2,1)$ (se Figur 1).



Figur 1. Definisjonsområdet i xy-planet

Randen av definisjonsområdet består av sidekantene *AB*, *BC*, *CD* og *AD* i rektanglet, der vi på hver sidekant har en bestemt verdi av enten *x* eller *y*. Dette gjør at vi for sidekantene får uttrykt *f* som en funksjon av én variabel. Til slutt analyserer vi hjørnene.

Linjestykket *AB*: Her er $y = -1$, som gir $f(x, -1) = -x^3 + x + 1 = g(x)$.

$g'(x) = -3x^2 + 1$. Løser $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dvs. kandidater til globalt ekstremalpunkt er $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$. Vi har at $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}} + 1 \approx 0{,}615$ og

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 \approx 1{,}385$.

Linjestykket *BC*: Her er $x = 2$, som gir $f(2, y) = -8 + y^2 + 2 = y^2 - 6 = g(y)$.

$g'(y) = 2y$. Løser $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Dvs. kandidat til globalt ekstremalpunkt er $(2, 0)$. Vi har at $f(2, 0) = -6$.

Linjestykket *DC*: Her er $y = 1$, som gir $f(x, 1) = -x^3 + x + 1 = g(x)$. Løsningene her er de samme som for $y = -1$, som er drøftet ovenfor, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Kandidater til globale ekstremalpunkter er $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$. Vi har at $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}} + 1 \approx 0{,}615$ og

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + 1 \approx 1{,}385.$

Linjestykket *AD*: Her er $x = -2$, som gir $f(-2, y) = 8 - y^2 - 2 = y^2 + 6 = g(y)$

$g'(y) = 2y$. Løser $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Dvs. kandidat til globalt ekstremalpunkt er $(-2, 0)$. Vi har at $f(-2, 0) = 6$.

Hjørnene er også kandidater til globale ekstremalpunkter:

A: $f(-2, -1) = 7$
B: $f(2, -1) = -5$
C: $f(2, 1) = -5$
D: $f(-2, 1) = 7$

(x, y)	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)$	$(-2, 0)$	$(2, 0)$	$(2, 1)$	$(2, -1)$	$(-2, -1)$	$(-2, 1)$
$f(x, y)$	0,615	−0,385	0,615	1,385	0,385	1,385	6	−6	−5	−5	7	7
								Globalt min.pkt			Globalt maks. pkt	Globalt maks. pkt

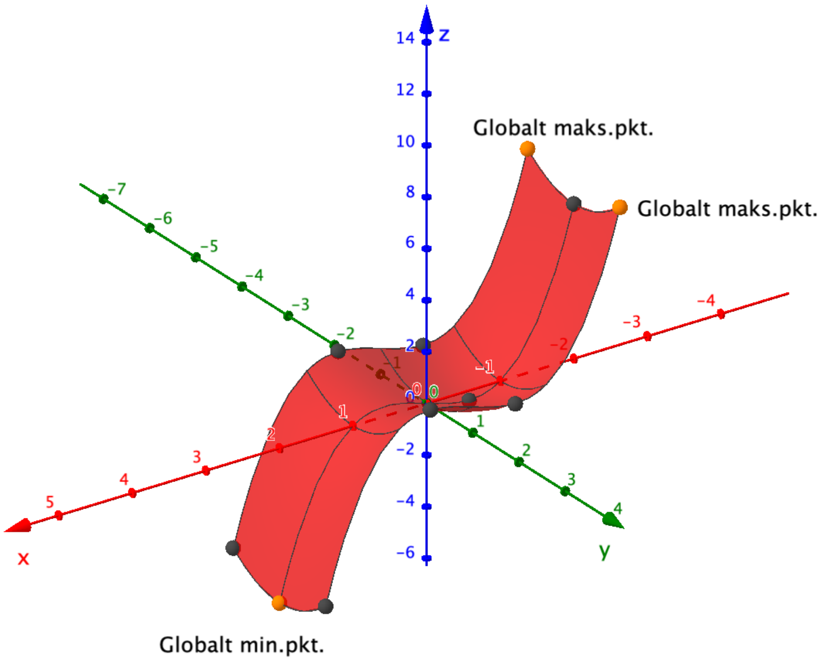
Tabellen viser at $f(x, y)$ har disse globale ekstremalpunktene på det rektangulære området:

- globale maksimumspunkter i $(-2, -1)$ og $(-2, 1)$, med maksimalverdi lik 7
- globalt minimumspunkt i $(2, 0)$, med minimumsverdi lik -6

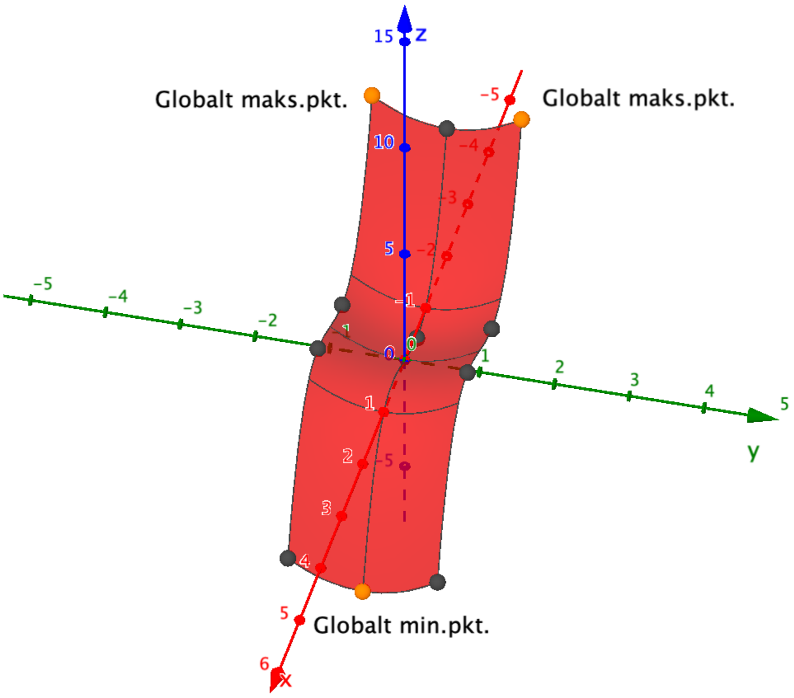
f) Tegn grafen til *f* i et dynamisk matematikkprogram (GeoGebra eller annen programvare), og plott ekstremalpunktene du har funnet (både lokale og globale). Kopier datagrafikk fra ulike perspektiv, slik at du får vist flaten og ekstremalpunktene tydelig.

Løsning:

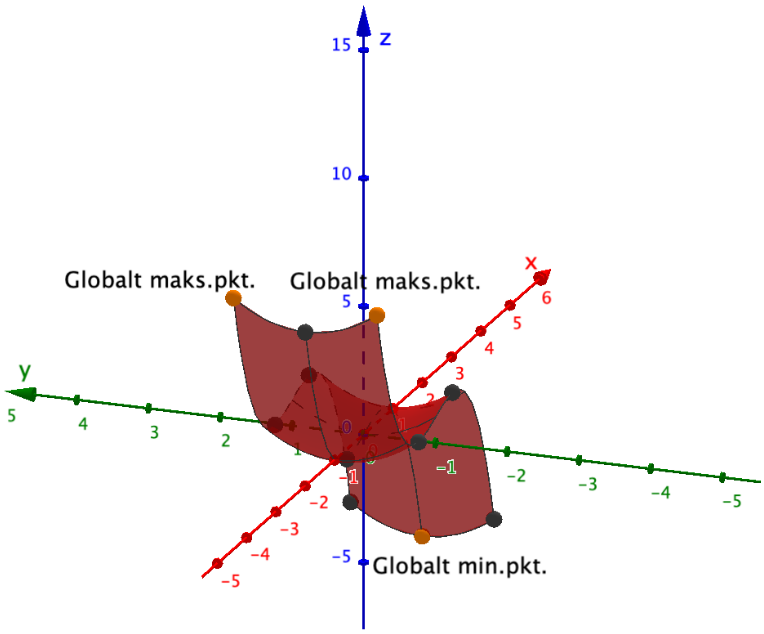
Grafen til *f* og ekstremalpunkter er plottet, og datagrafikk (fra GeoGebra) er vist fra ulike perspektiv i Figurene 2, 3, 4, 5. Globale ekstremalpunkter er oransje, og lokale ekstremal-punkter er svarte.



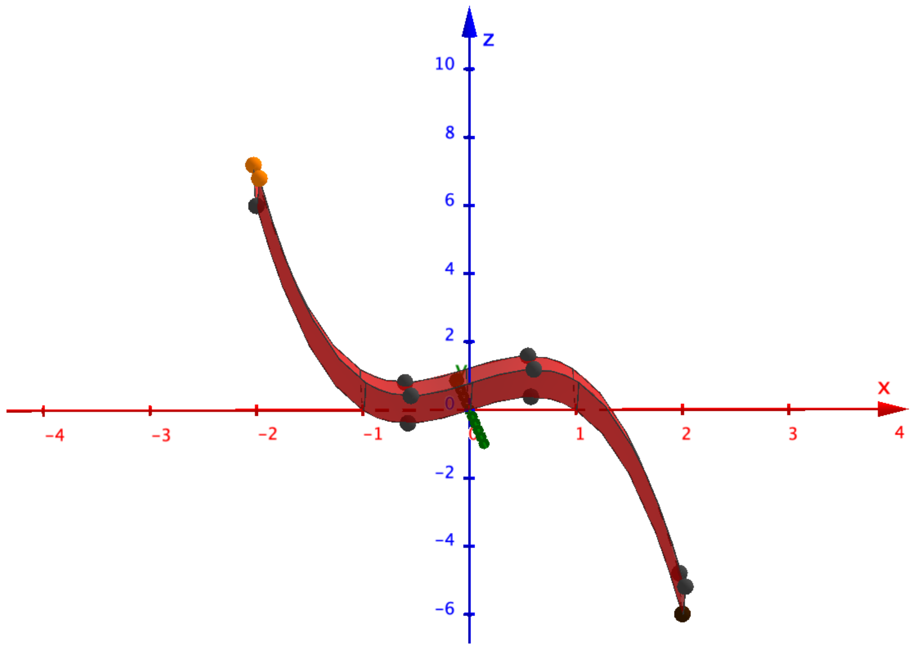
Figur 2



Figur 3



Figur 4



Figur 5

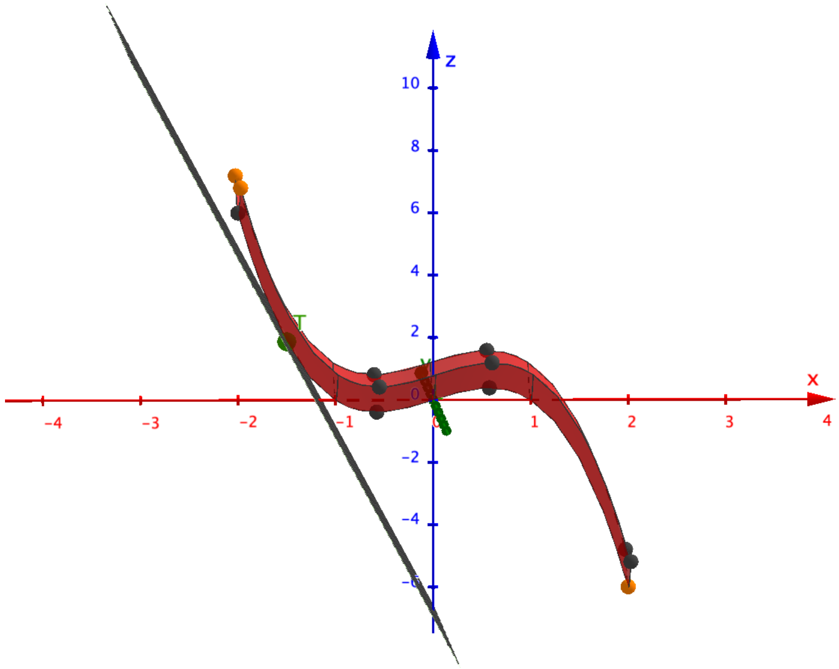
g) Finn den lineære approksimasjonen $L(x, y)$ til f i punktet $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Tegn grafene til f og L i samme koordinatsystem ved hjelp av et matematikkprogram, og kopier datagrafikk som illustrerer at L er et plan som tangerer f i punktet $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$.

Løsning:

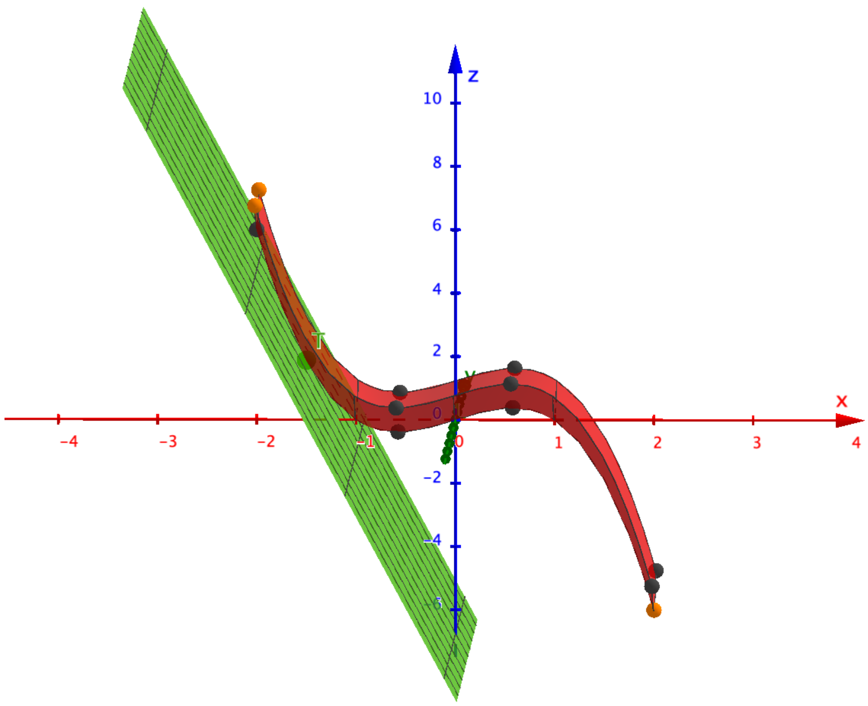
Den lineære approksimasjonen $L(x, y)$ til f i punktet $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ er gitt ved:

$$\underline{L(x,y)} = f\left(-\tfrac{3}{2},0\right) + \tfrac{\partial f}{\partial x}\left(-\tfrac{3}{2},0\right)\left(x+\tfrac{3}{2}\right) + \tfrac{\partial f}{\partial y}\left(-\tfrac{3}{2},0\right)y = \underline{-\tfrac{23}{4}x - \tfrac{27}{4}}.$$

Grafen og tangentplanet er vist i Figur 6 og 7.



Figur 6



Figur 7

Oppgave 3 (30 %)

Alle utregninger skal tas med i besvarelsen.

Et basseng inneholder 3 000 liter saltvann med en konsentrasjon på 35 gram salt per liter vann. Så fylles det på bassenget en saltvannsløsning med en konsentrasjon på 12 gram salt per liter vann, samtidig som det tappes væske ut av bassenget. Innstrømningsrate og utstrømningsrate er begge konstant lik 10 liter per minutt. Anta at innholdet i tanken er godt blandet hele tiden.

a) La $S(t)$ betegne saltmengden i kg i bassenget ved tiden *t*, og forklar hvorfor differensiallikningen med initialbetingelsen gitt nedenfor vil være en modell for situasjonen beskrevet ovenfor.

$$\frac{dS}{dt} = 0{,}12 - \frac{S}{300}, \; S(0) = 105.$$

Løsning:

La $S(t)$ betegne saltmengden i kg i bassenget ved tiden *t* i minutter.

Da vil $\frac{dS}{dt}$ betegne momentan endringsrate for saltmengden i tanken i tidspunktet *t*, med benevning kg/min. Vi har at

$\frac{dS}{dt} = \left(\text{konsentrasjon inn } \frac{kg}{L}\right) \cdot \left(\text{væskestrøm inn } \frac{L}{min}\right) - \left(\text{konsentrasjon ut } \frac{kg}{L}\right) \cdot \left(\text{væskestrøm ut } \frac{L}{min}\right).$

Litt forenklet kan vi si at: $\frac{dS}{dt} =$ [rate for masse inn] – [rate for masse ut].

Rate for masse inn er gitt ved: 0,012 kg/L·10 L/min = 0,12 kg/min.

Rate for masse ut er gitt ved: $\frac{S(t)}{3\,000}$ kg/L·10 L/min = $\frac{S(t)}{300}$ kg/min (som vi forenkler til $\frac{S}{300}$ kg/min).

Ved tidspunktet $t = 0$ er saltmengden i bassenget gitt ved:
3 000 L· 35 g/L = 105 000 g = 105 kg.

Dette gir følgende modell for situasjonen beskrevet ovenfor:

$\frac{dS}{dt} = 0{,}12 - \frac{S}{300}, \; S(0) = 105$, som var det vi skulle vise.

b) Finn et eksplisitt uttrykk for $S(t)$, og begrunn matematisk hvorfor den teknikken du bruker virker (dvs. forklar underveis hva som motiverer de stegene du tar for å løse problemet). Beregn hva saltkonsentrasjonen i bassenget vil være etter 2 timer.

Løsning:

Vi løser differensiallikningen fra a):

$\frac{dS}{dt} = 0{,}12 - \frac{S}{300} \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{36-S}{300} \Leftrightarrow \frac{dS}{36-S} = \frac{dt}{300}$. Vi foretar antiderivasjon på begge sider av likhetstegnet: $\int \frac{1}{36-S}\, dS = \int \frac{1}{300} dt.$ Dette gir følgende likning: $-\ln|36 - S| = \frac{t}{300} + C \Leftrightarrow \ln|36 - S| = -\frac{t}{300} + C_1$ (*) (der $C_1 = -C$).

For å kunne løse opp absoluttverditegnet, trenger vi å gjøre en drøfting av fortegnet til uttrykket $36 - S$:

Den høyeste verdien av S er lik 105 (kg salt) som inntreffer når $t = 0$. Den laveste verdien av S, kall den $S_{\min}$, er lik den mengden salt som tilsvarer at alt saltvannet som var i bassenget i utgangspunktet er byttet ut med væsken som tappes inn i bassenget (altså at saltkonsentrasjonen i bassenget er lik saltkonsentrasjonen i væsken som tappes inn). Vi har derfor at $S_{\min}$ = 12 g/L·3 000 L = 36 000 g = 36 kg. Av dette følger at $(36 - S) < 0$ som igjen medfører at $|36 - S| = S - 36$. Vi setter inn $S - 36$ for $|36 - S|$ i likning (*) og løser likningen:

$\ln(S - 36) = -\frac{t}{300} + C_1 \Leftrightarrow \ln(S - 36) = \frac{-t}{300} + C_1 \Leftrightarrow S - 36 = e^{-\frac{t}{300}+C_1}$

$\Leftrightarrow S(t) = 36 + C_2 e^{-\frac{t}{300}}$ (der $C_2 = e^{C_1}$). Vi løser for initialbetingelsen og finner C_2:
$S(0) = 10 \Leftrightarrow 105 = 36 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 69$ og vi får løsningen:

$$\underline{S(t) = 36 + 69e^{-\frac{t}{300}}}.$$

Etter 2 timer er saltmengden i bassenget gitt ved: $S(120) \approx 82{,}25$. Dette svarer til en saltkonsentrasjon på $\frac{82{,}25}{3\,000} \approx 0{,}0274$ kg/L = <u>27,4 g/L</u>.

c) Tenk deg en situasjon som er lik den som er gitt i begynnelsen av oppgaven. Nå skal du imidlertid endre inn- og utstrømningsraten (som fremdeles skal være like) slik at saltkonsentrasjonen i bassenget vil være 25 gram salt per liter vann etter 2 timer. Hva må inn- og utstrømningsraten være for at dette skal inntreffe?

Løsning:

La $S_2(t)$ betegne saltmengden i kg i bassenget ved tiden *t* i minutter i den nye situasjonen. Vi tar utgangspunkt i uttrykket for endringsraten for saltmengden i bassenget

$\frac{dS_2}{dt} = \left(\text{konsentrasjon inn } \frac{kg}{L}\right) \cdot \left(\text{væskestrøm inn } \frac{L}{min}\right) - \left(\text{konsentrasjon ut } \frac{kg}{L}\right) \cdot \left(\text{væskestrøm ut } \frac{L}{min}\right)$

og lar *a* L/min betegne væskestrøm inn og væskestrøm ut. Da har vi følgende:

Rate for masse inn er gitt ved: 0,012 kg/L$\cdot a$ L/min = 0,012$\cdot a$ kg/min.

Rate for masse ut er gitt ved: $\frac{S_2(t)}{3\,000}$ kg/L$\cdot a$ L/min = $\frac{S_2(t)\cdot a}{3\,000}$ kg/min (som vi forenkler til = $\frac{S_2\cdot a}{3\,000}$ kg/min).

En saltkonsentrasjon på 25 g/L svarer til at det er 25 g/L·3 000 L = 75 kg salt i bassenget. Da får vi følgende differensiallikning med betingelser:

$\frac{dS_2}{dt} = 0{,}012a - \frac{S_2\cdot a}{3\,000}$, $S_2(0) = 105$ og $S_2(120) = 75$.

Vi løser denne tilsvarende som i b).

$\frac{dS_2}{dt} = 0{,}012a - \frac{S_2\cdot a}{3\,000} \Leftrightarrow \frac{dS_2}{dt} = \frac{36a - S_2\cdot a}{3\,000} \Leftrightarrow \frac{dS_2}{dt} = \frac{(36-S_2)a}{3\,000} \Leftrightarrow \frac{dS_2}{36-S_2} = \frac{a\,dt}{3\,000}$. Vi foretar antiderivasjon på begge sider av likhetstegnet: $\int \frac{dS_2}{36-S_2} = \int \frac{a\,dt}{3000}$. Dette gir følgende likning: $-\ln|36 - S_2| = \frac{a}{3\,000}t + C \Leftrightarrow \ln|36 - S_2| = -\frac{a}{3\,000}t + C_1$. Vi løser opp absoluttverdi-tegnet med samme resonnement som ovenfor, og får følgende likning:

$\ln(S_2 - 36) = -\frac{a}{3\,000}t + C_1 \Leftrightarrow S_2 - 36 = e^{-\frac{a}{3\,000}t + C_1} \Leftrightarrow S_2(t) = 36 + C_2 e^{-\frac{a}{3\,000}t}$
(der $C_2 = e^{C_1}$). Vi finner verdiene av C_2 og a ved hjelp av de gitte betingelsene:

Initialbetingelse: $S_2(0) = 105 \Leftrightarrow 105 = 36 + C_2 \Leftrightarrow C_2 = 69$. Det vil si at

$S_2(t) = 36 + 69e^{-\frac{a}{3\,000}t}$.

Sluttbetingelse: $S_2(120) = 75 \Leftrightarrow 75 = 36 + 69e^{-0{,}04a} \Leftrightarrow \frac{39}{69} = e^{-0{,}04a}$. Vi tar

logaritmen av uttrykket på begge sider av likhetstegnet, og får $\ln\left(\frac{39}{69}\right) = -0{,}04a$,

som medfører at $a = 25\ln\left(\frac{23}{13}\right) \approx 14{,}3$ L/min.

Det vil si at væskestrømmen ut og inn av bassenget må være ca. 14,3 L/min hvis saltkonsentrasjonen i bassenget skal være 25 g/L etter 2 timer.

--------------------- Det nedenfor er det **ikke** krav om å besvare i oppgaven --------------------

Vi setter inn $a = 14{,}3$ og får $S_2(t) = 36 + 69e^{-0{,}0048t}$. Grafene til S og S_2 er vist nedenfor.