EKSAMEN MA0002, 07. MAI 2020 – LØSNINGER

Oppgave 1 (25 %)

Alle utregninger skal tas med i besvarelsen.

La $N(t)$ betegne størrelsen på en populasjon ved tiden t (år). Anta at $N(t)$ utvikler seg i henhold til den logistiske likningen

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

der r og K er konstanter som står for henholdsvis den *indre vekstraten* og *bæreevnen* (kapasiteten) til populasjonen.

Finn den indre vekstraten til populasjonen når du får vite at bæreevnen er lik 100, $N(0) = 10$ og $N(1) = 20$. (Her får du bruk for løsningen på den logistiske likningen. Du skal *vise* hvordan du finner denne løsningen).

Løsning:

... $r = \ln\frac{9}{4}$.

Oppgave 2 (40 %)

Alle utregninger skal tas med i besvarelsen.

Betrakt funksjonen $f(x, y) = 3e^{-0,2x}$ på det lukkede og begrensede området

$$D_f = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}.$$

Finn den lineære approksimasjonen $L(x, y)$ til f i punktet $(-2, 0)$. Tegn grafene til f og L i samme koordinatsystem ved hjelp av et matematikkprogram, og kopier datagrafikk som illustrerer at L er et plan som tangerer f i punktet $(-2, 0)$.

----

a) Finn gradientvektoren $\overline{\nabla} f(x, y)$.

Løsning:

Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -0,6e^{-0,2x}$ og $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$. Da er

gradientvektoren $\overline{\nabla} f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6e^{-0,2x} \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) I hvilken retning øker f raskest i punktet $(-3, 0)$? Regn ut størrelsen på denne økningen.

Løsning:

I et vilkårlig punkt (x_0, y_0) vil en deriverbar funksjon $f(x_0, y_0)$ øke raskest i retning av gradientvektoren i dette punktet. Altså vil *f* øke raskest i retning av $\overline{\nabla} f(-3,0) = \begin{bmatrix} -0{,}6e^{0{,}6} \\ 0 \end{bmatrix}$ i punktet $(-3,0)$. Økningen i dette punktet, i retning av gradientvektoren, er lik lengden av gradientvektoren i punktet, altså lik $\left\| \begin{bmatrix} -0{,}6e^{0{,}6} \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-0{,}6e^{0{,}6})^2} = \underline{0{,}6e^{0{,}6} \approx 1{,}09}$.

c) Finn den retningsderiverte til *f* i punktet $(-3,0)$ i retning av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Gi en geometrisk tolkning av svaret.

Løsning:

Vi skal finne den retningsderiverte til *f* i punktet $(-3,0)$ i retning av vektoren $\overline{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Først må vi normalisere $\overline{u}$ (dette betyr å finne en vektor med samme retning som $\overline{u}$ som har lengde lik 1). Kall den normaliserte vektoren for $\overline{v}$. Vi har at $\overline{v} = \frac{\overline{u}}{|\overline{u}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Da vil den retningsderiverte til $f(x,y)$ i punktet $(-3,0)$ i retning av $\overline{v}$ være gitt ved dette skalarproduktet (også kalt prikkproduktet)

$$D_{\overline{v}} f(-3,0) = (\overline{\nabla} f(-3,0)) \cdot \overline{v},$$

og vi får at $\begin{bmatrix} -0{,}6e^{0{,}6} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-0{,}6e^{0{,}6}) = \frac{-3}{5\sqrt{5}} e^{0{,}6} \approx -0{,}15$.

Geometrisk tolkningen av den retningsderiverte: Den retningsderiverte sier noe om hvor stor helning det er i punktet $(-1,0)$ langs den stien (på flaten i $\mathbb{R}^3$) som har retning bestemt av vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Denne stien er en kurve med stigningstall tilnærmet lik $-0{,}15$ i punktet $(-3,0)$. Hvis vi ser for oss at grafen til *f* beskriver et terreng som vi beveger oss i, bærer det nedover i terrenget i det aktuelle punktet, i den angitte retningen (dvs. vi beveger oss $0{,}15$ enheter nedover for hver enhet vi beveger oss i retningen til vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i *xy*-planet).

d) Begrunn hvorfor *f* ikke har noen kritiske punkter på definisjonsområdet.

Løsning:

Kritiske punkter inntreffer der gradientvektoren er lik nullvektor. Fra a) har vi at

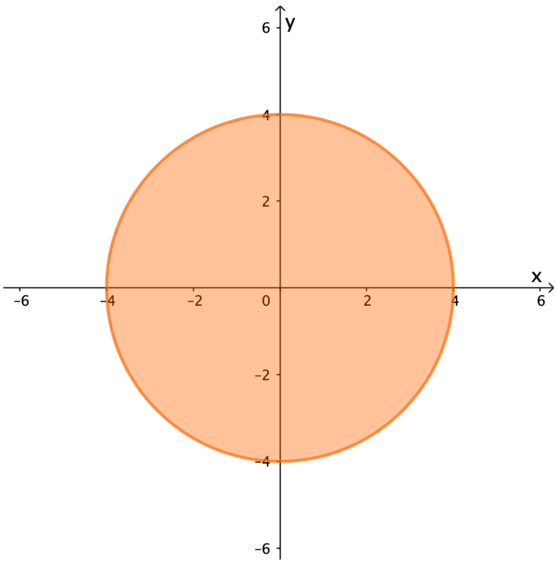
$$\overline{\nabla} f(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}6e^{-0{,}2x} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vi løser likningen $\begin{bmatrix} -0{,}6e^{-0{,}2x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -0{,}6e^{-0{,}2x} = 0$. Denne likningen har ingen løsning. Altså har *f* ingen kritiske punkter. *Q.E.D.*

e) Finn globale maksimums- og minimumspunkter for *f* på definisjonsområdet.

Løsning:

Ekstremalverdi-teoremet i $\mathbb{R}^2$ sier at en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset området har både et globalt minimums- og et globalt maksimumspunkt på definisjonsområdet (det kan være flere med samme verdi). Vi skal nå finne kandidater til disse ekstremalpunktene på randen av definisjonsområdet som er en sirkel med sentrum i $(0, 0)$ og radius 4 (se Figur 1).



Figur 1. Definisjonsområdet i *xy*-planet

Vi foretar følgende variabelskifte:

$x = 4\cos t$
$y = 4 \sin t$

Så substituerer vi for *x* og får at $f(x, y) = 3e^{-0{,}8\cos t} = g(t)$.

$g'(t) = 2{,}4e^{-0{,}8\cos t} \sin t$. Så løser vi $g'(t) = 0$.

$2{,}4e^{-0{,}8\cos t} \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ eller $t = \pi$.

$t = 0$ medfører at $x = 4$ og $y = 0$. Dvs. ekstremalpunkt: $(4, 0)$. Vi har at $f(4, 0) = 3e^{-0,8}$.

$t = \pi$ medfører at $x = -4$ og $y = 0$. Dvs. ekstremalpunkt: $(-4, 0)$. Vi har at $f(-4, 0) = 3e^{0,8}$.

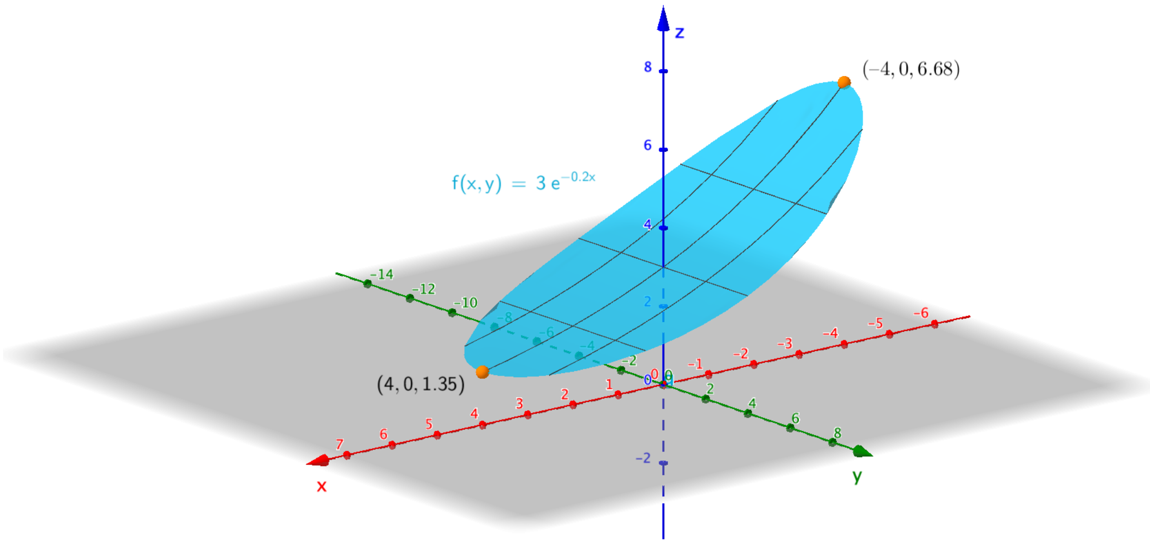
$f(x, y)$ har dermed disse globale ekstremalpunktene på det sirkulære området:

- globalt maksimumspunkt i $(-4, 0)$ med maksimumsverdi lik $3e^{0,8} \approx 6{,}68$.
- globalt minimumspunkt i $(4, 0)$ med minimumsverdi lik $3e^{-0,8} \approx 1{,}35$.

f) Tegn grafen til f i et dynamisk matematikkprogram (GeoGebra eller annen programvare), og plott ekstremalpunktene du har funnet. Kopier datagrafikk slik at du får vist flaten og ekstremalpunktene tydelig.

Løsning:

Datagrafikk (fra GeoGebra) viser grafen til f og ekstremalpunktene (oransje) i Figur 2.



Figur 2

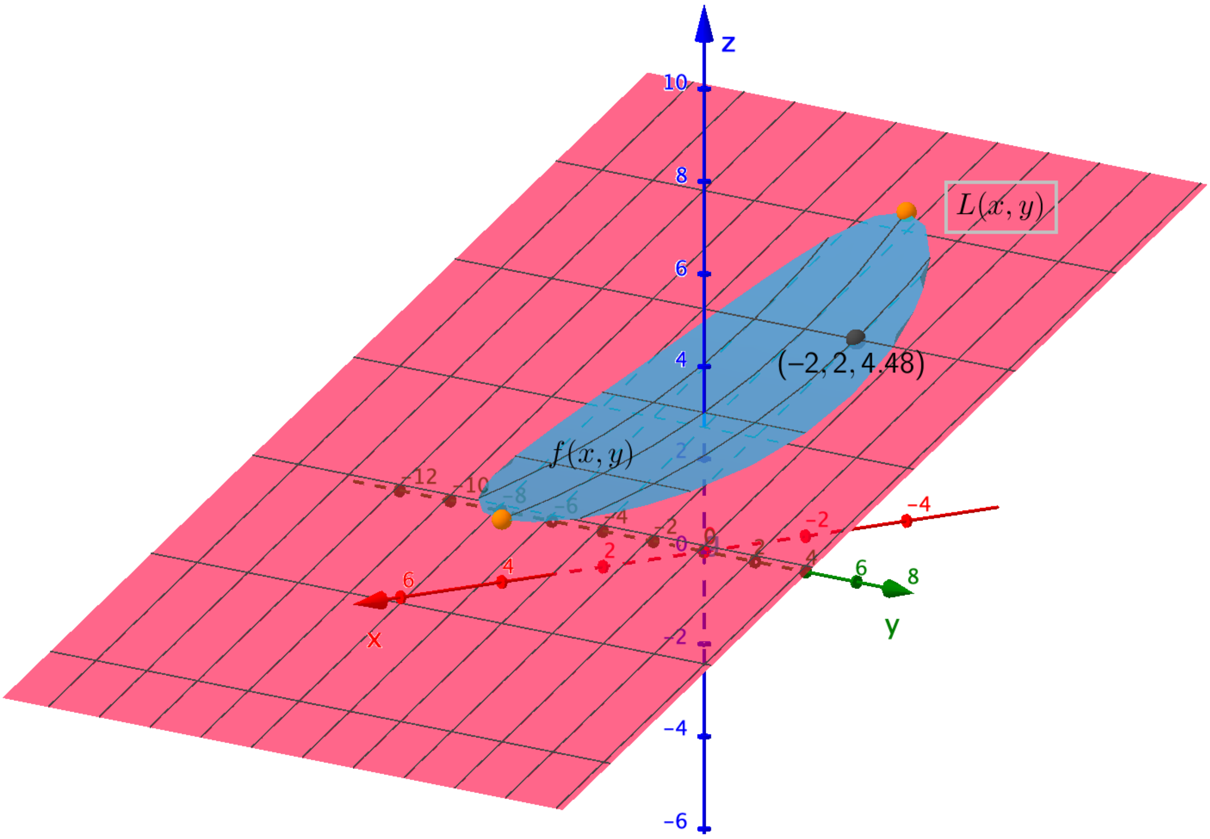
g) Finn den lineære approksimasjonen $L(x, y)$ til f i punktet $(-2, 2)$. Tegn grafene til f og L i samme koordinatsystem ved hjelp av et matematikkprogram, og kopier datagrafikk som illustrerer at L er et plan som tangerer f i punktet $(-2, 2)$.

Løsning:

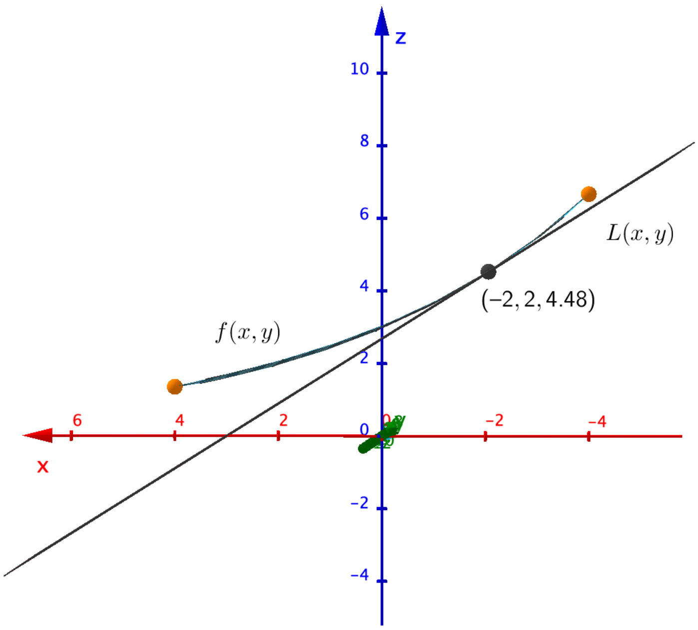
Den lineære approksimasjonen $L(x, y)$ til f i punktet $(-2, 2)$ er gitt ved:

$$\underline{L(x,y)} = f\,(-2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2,2)(x+2) + \frac{\partial f}{\partial y}(-2,2)(y-2) = 3e^{0,4} - 0{,}6e^{0,4}(x+2) = 1{,}8e^{0,4} - 0{,}6e^{0,4}x.$$

Grafen og tangentplanet er vist fra ulike perspektiv i Figur 3 og Figur 4.



Figur 3



Figur 4

Oppgave 3 (35 %)

Alle utregninger skal tas med i besvarelsen.

a) Finn den generelle løsningen på følgende system av differensiallikninger:

$$\frac{dx_1}{dt} = -5x_1(t) - 2x_2(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 6x_1(t) + 3x_2(t)$$

Løsning:

... $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underline{C_1 e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}.$

b) Finn den spesielle løsningen på systemet i (a) under startbetingelsene $x_1(0) = 2$ og $x_2(0) = 4$.

Løsning:

... $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underline{-5e^{-3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 3e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}}.$

c) Undersøk stabiliteten til likevektspunktet (0,0) og bestem om det er et sluk, en kilde eller et sadelpunkt. Begrunn svaret.

Løsning:

... Egenverdiene til systemet er lik -3 og 1. Dvs. at likevektspunktet er et sadelpunkt (ustabilt).