Løsningsforslag Eksamen MA0002 – 29. mai 2019

Oppgave 1

La A og B være to matriser

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vis at $B = A^{-1}$, og bruk dette til å løse likningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Løsning:

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ og

$BA = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, som viser at $B = A^{-1}$.

Vi oversetter likningssystemet til en matriselikning:

$A\overline{x} = \overline{b}$, der $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\overline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\overline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Denne har løsning: $A^{-1}A\overline{x} = A^{-1}\overline{b} \iff \overline{x} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dvs. $x_1 = 2,\ x_2 = 4$ og $x_3 = 3$.

Oppgave 2

En populasjon utvikler seg i henhold til Lesliematrisen $L = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0,6 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Hva kan du si om populasjonen på grunnlag av elementene i Lesliematrisen?

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen L.

c) Forklar så presist som mulig hvordan det vil gå med denne populasjonen i det lange løp. Begrunn svaret.

Løsning:

a) Individene i populasjonen er inndelt i to årskull, 0-åringer og 1-åringer, og vi betrakter kun hunkjønn. Det er slik at 0-åringene føder i gjennomsnitt 2 avkom per år og 1-åringene føder i gjennomsnitt 5 avkom per år. Overlevelsesraten for 0-åringene er lik 0,6. (Ingen overlever til de blir 2 år).

b) Egenverdiene til L finner vi ved å løse den karakteristiske likningen:

$\det(L - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Finner løsningene ved å bruke ABC-formelen: $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 3$. Vi ser at $\lambda_2 = 3$ er dominant egenverdi.

Finner egenvektoren tilhørende $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0,6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (L + I_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0,6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi setter $x_2 = s$, og får at $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$. La $s = 3$ og vi får

egenvektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Finner egenvektoren tilhørende $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0,6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (L - 3I_3)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0,6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vi setter $x_2 = s$, og får at $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$. La $s = 1$ og vi får

egenvektoren $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Fordi $\lambda_2 = 3$ er dominant egenverdi til Lesliematrisen er dette populasjonens vekstparameter. Det betyr at populasjonen i det lange løp vil vokse og bli tre ganger så stor for hvert år. Fordelingen av individer i de to årskullene vil i det lange løp stabilere seg i forholdet 5:1, som er gitt ved egenvektoren tilhørende den dominante egenverdien. Altså, det vil i det lange løp være fem ganger så mange 0-åringer som 1-åringer i populasjonen.

Oppgave 3

En bakteriekultur $B(t)$ med en bæreevne på 40 000 bakterier utvikler seg i henhold til den logistiske differensiallikningen

$$\frac{dB}{dt} = 0,5B\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right),$$

der t er tiden i timer, og $B(0) = 200$.

a) Forklar hvordan denne differensiallikningen modellerer at bakteriekulturen vokser eksponentielt i starten og at veksten flater ut når antallet bakterier i kulturen nærmer seg bæreevnen.

b) Finn et eksplisitt uttrykk for $B(t)$. Vis utregning. Skisser grafen til $B(t)$.

c) Etter hvor lang tid oppnår bakteriekulturen sin maksimale vekstrate? Vis hvordan du kom fram til svaret. Hva er vekstraten i dette tidspunktet? Angi svaret med enhet.

Løsning:

a) Betrakt differensiallikningen $\frac{dB}{dt} = 0{,}5B\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right)$. For små verdier av B vil faktoren $\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right)$ være tilnærmet lik 1. Matematisk kan vi representere dette ved at $\frac{dB}{dt} \approx 0{,}5\,B$ som igjen betyr at bakteriekulturen vokser eksponentielt i starten.

For verdier av B som nærmer seg bæreevnen (altså når $t \longrightarrow \infty$) vil $\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right) \longrightarrow 0$. Matematisk kan vi representere dette ved at $\frac{dB}{dt} \approx 0$ som igjen betyr at veksten flater ut for store t-verdier.

b) Skal løse differensiallikningen (*) gitt ved $\frac{dB}{dt} = 0{,}5B\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right)$ med initialbetingelse $B(0) = 200$.

$$\frac{dB}{dt} = 0{,}5B\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right) \Leftrightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{0{,}5}{40\,000}B(40\,000 - B) \Leftrightarrow \frac{dB}{B(40\,000-B)} = 0{,}0000125dt.$$

Betrakt venstre side av likningen, og bruk delbrøkoppspalting for å finne konstanter A og C slik at

$$\frac{1}{B(40\,000-B)} = \frac{A}{B} + \frac{C}{40\,000-B} \Leftrightarrow \frac{1}{B(40\,000-B)} = \frac{A(40\,000-B)}{B} + \frac{CB}{40\,000-B} \Leftrightarrow$$

$A(40\ 000 - B) + CB = 1 \Leftrightarrow 40\ 000A = 1$ og $(C - A)B = 0 \ \Leftrightarrow$
$A = \dfrac{1}{40\ 000}\ og\ C = \dfrac{1}{40\ 000}$.

Setter inn dette i venstre side av differensiallikningen (*), og løser denne:

$$\frac{1}{40\ 000}\left(\int \frac{1}{B}dB + \int \frac{1}{40\ 000 - B}dB\right) = \int 0{,}0000125dt$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{40\ 000}(ln|B| - ln|40\ 000 - B|) = 0{,}0000125t + C_1$$

$$\Updownarrow$$

$$ln\left|\frac{B}{40\ 000 - B}\right| = 0{,}5t + C_2$$

Kan løse opp absoluttverditegnet fordi $\dfrac{B}{40\ 000 - B} > 0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{B}{40\ 000 - B} = \ e^{0{,}5t + C_2}$$

$$\Updownarrow$$

$$B = C_2e^{0{,}5t}(40\ 000 - B)$$

$$\Updownarrow$$

$$(1 + C_2e^{0{,}5t})B = 40\ 000C_2e^{0{,}5t}$$

$$\Updownarrow$$

$$B = \frac{40\ 000C_2e^{0{,}5t}}{1 + C_2e^{0{,}5t}}$$

$$\Updownarrow$$

$$B = \frac{40\ 000}{\frac{1}{C_2}e^{0{,}5t} + 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$B(t) = \frac{40\,000}{C_3 e^{-0,5t} + 1}$$

Løser for initialbetingelsen og finner C_3:

$$B(0) = 200 \iff \frac{40\,000}{C_3 + 1} = 200 \iff C_3 = 199$$

Dvs. at løsningen på differensiallikningen er lik:

$$B(t) = \frac{40\,000}{199 e^{-0,5t} + 1}$$

For skisse av grafen til *B*, se side 7.

c) Den momentane vekstraten $\frac{dB}{dt}$ til funksjonen *B* er gitt ved differensiallikningen

$\frac{dB}{dt} = 0,5B\left(1 - \frac{B}{40\,000}\right) = 0,5B - 0,0000125B^2 = g(B).$

Dette er en andregradsfunksjon hvis graf er en parabel som vender den hule siden ned fordi koeffisienten til andregradsleddet er negativ.

Vi finner maksimalverdien til vekstraten $\frac{dB}{dt}$ ved å regne ut hvor dens deriverte er lik null:

$g'(B) = 0,5 - 0,000025B$

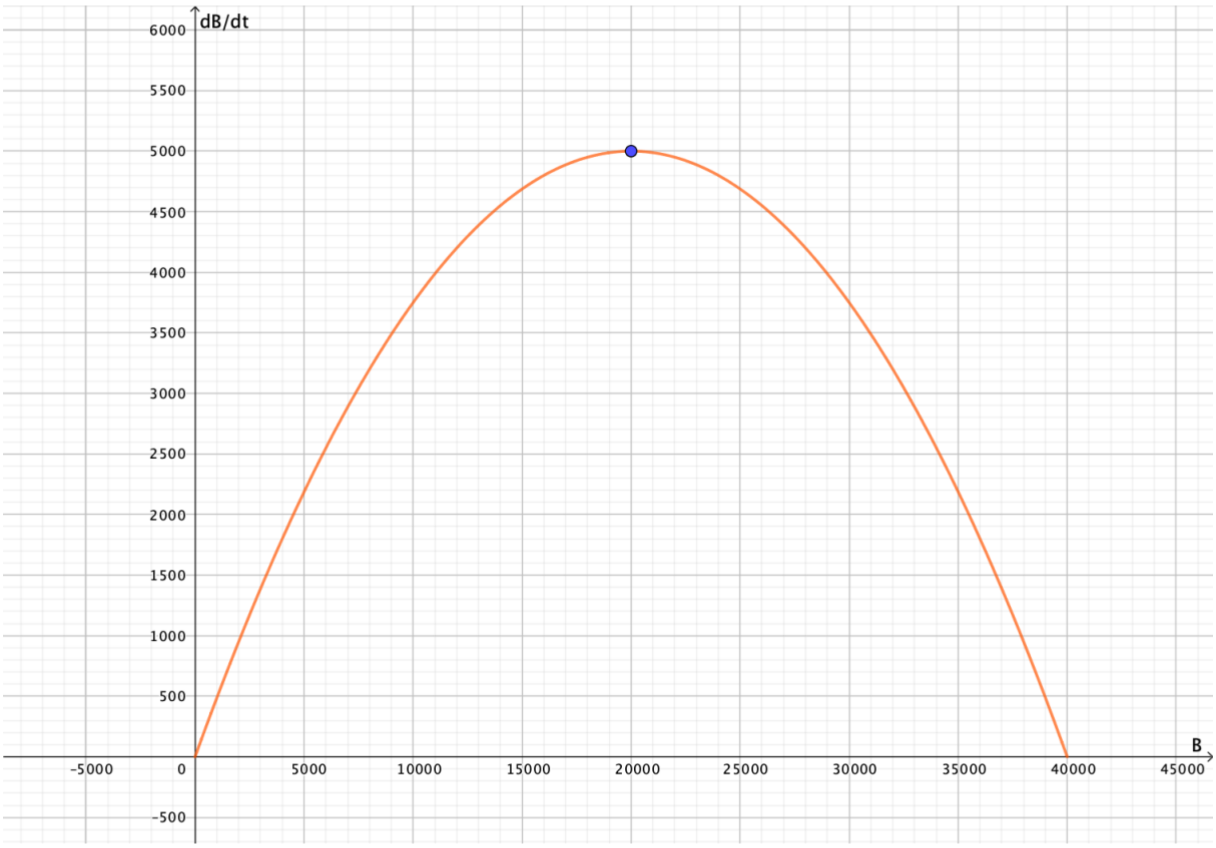
$g'(B) = 0 \iff 0,5 - 0,000025B = 0 \iff 0,5 = 0,000025B \iff B = 20\,000$

Det vil si at maksimal vekstrate for bakteriekulturen oppnås når det er 20 000 bakterier, altså når antall bakterier er lik halvparten av bæreevnen. Da er vekstraten lik

$\frac{dB}{dt}(20\,000) = 0,5 \cdot 20\,000 - 0,0000125 \cdot (20\,000)^2 = 5000$

Det vil si at den maksimale vekstraten er lik <u>5000 bakterier per time</u>.

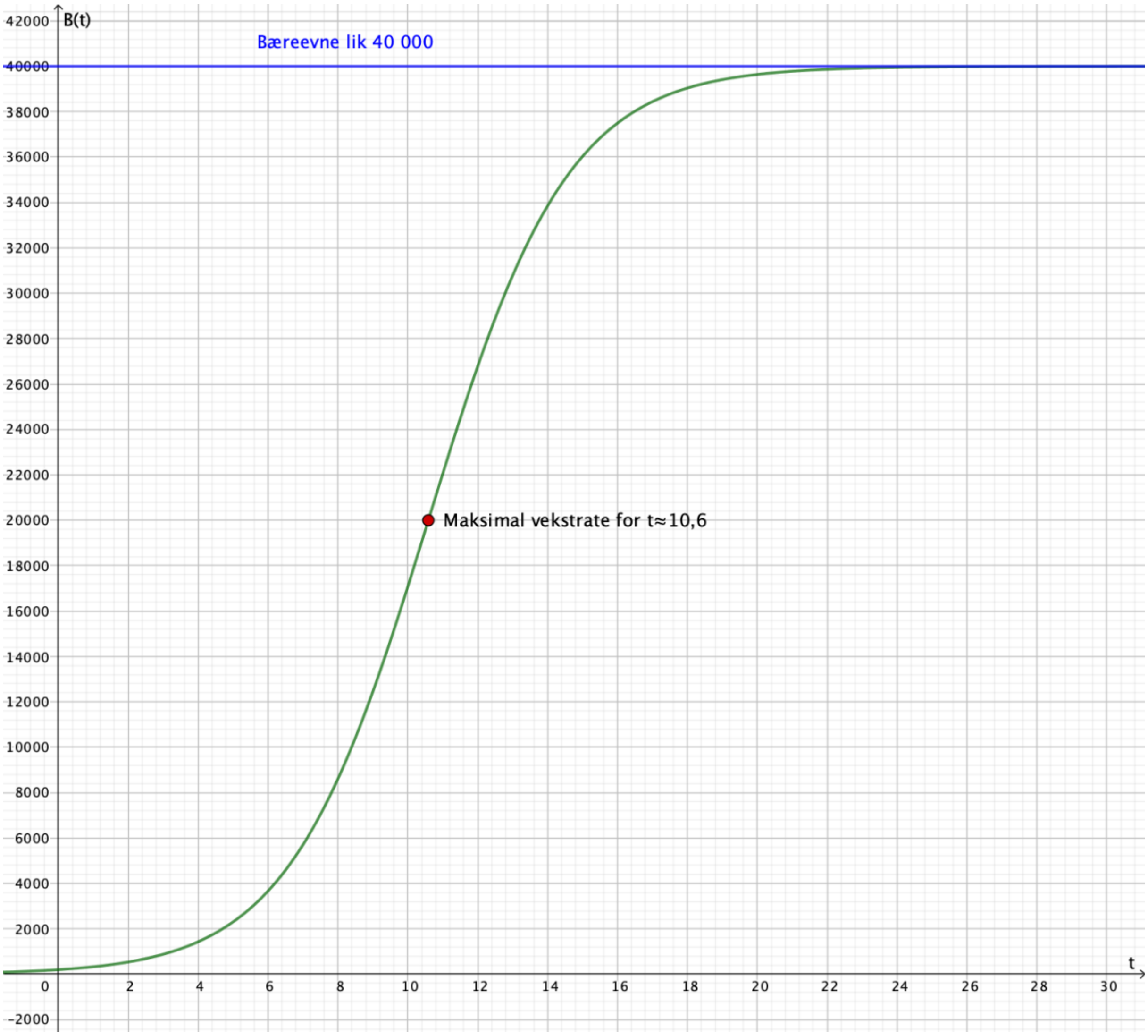
Figuren nedenfor viser grafen til den deriverte $\frac{dB}{dt}$ som funksjon av antall bakterier B. (Det er ikke noe krav i oppgaven om å tegne denne grafen).



For å finne tidspunktet der vekstraten når sitt maksimum, løser vi likningen $B(t) = 20\ 000$.

$$\frac{40\ 000}{199e^{-0,5t} + 1} = 20\ 000$$
$$\Updownarrow$$
$$199e^{-0,5t} + 1 = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$e^{-0,5t} = \frac{1}{199}$$
$$\Updownarrow$$
$$-0,5t = \ln\left(\frac{1}{199}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$\underline{t \approx 10,6}$$

Det vil si at maksimal vekstrate oppnås etter ca. <u>10 timer og 36 minutter</u>.



B(t)
Bæreevne lik 40 000
Maksimal vekstrate for t≈10,6
t

Oppgave 4

Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + 4x - y^2$$

på det lukkede og begrensede området

$$D = \{(x, y) : -6 \leq x \leq 2 \text{ og } -2 \leq y \leq 4\}.$$

Grafen til f er vist fra to ulike perspektiv i Vedlegg 1.

a) Finn og klassifiser eventuelle kritiske punkter for f på D.

b) Finn globale maksimums- og minimumspunkter for f på D.

c) Verifiser at $f(x, y)$ er deriverbar i punktet $(1, 0)$, og finn den lineære approksimasjonen til $f(x, y)$ i $(1, 0)$. Bruk dette til å finne en approksimasjon til funksjonsverdien i punktet $(1.01, 0.01)$. Sammenlikn approksimasjonen med $f(1.01, 0.01)$.

Løsning:

a) De partiellderiverte er lik $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$. Gradienten $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x + 4 \\ -2y \end{bmatrix}$. Vi har at $\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x = -2$ og $y = 0$. Dvs. at $(-2{,}0)$ er et kritisk punkt.

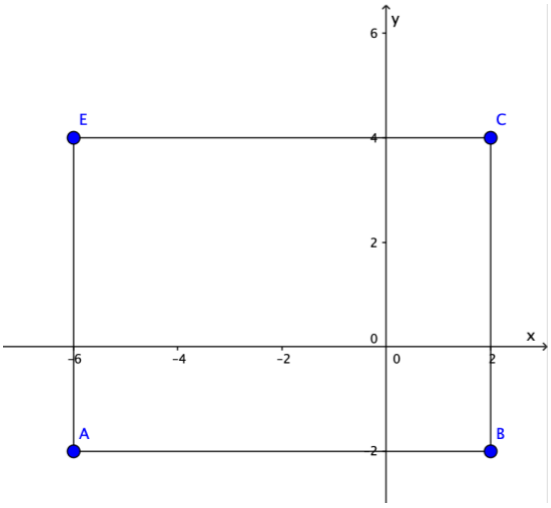
Vi har at $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$.

Hessematrisen til f i $(-1, 0)$ er dermed gitt ved:

$$H\, f(-1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-2, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2\,, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$\det Hf(-2, 0) = -4 < 0$. Dette medfører iflg. andreordens partiellderivert-testen at punktet $(-2, 0)$ er et <u>sadelpunkt</u> (jf. formelark).

b) Vi må undersøke randen av definisjonsområdet som er et rektangel i *xy*-planet med hjørner i punktene A$(-6, 4)$, $B(2, -2)$, $C(2, 4)$ og $E(-6, 4)$. Vi undersøker sidekantene og hjørnene på rektanglet (se figur nedenfor) med tanke på globale ekstremalpunkter:



1) Linjestykket *AB*: Her er $y = -2$.

$f(x,-2) = x^2 + 4x - 4 = g(x)$. Vi har at $g'(x) = 2x + 4$. Videre er $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Dvs. $(-2,-2)$ er kandidat til globalt ekstremalpunkt, der $f(-2,-2) = -8$.

2) Linjestykket *BC*: Her er $x = 2$.

$f(2,y) = 12 - y^2 = g(y)$. Vi har at $g'(y) = -2y$. Videre er $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Dvs. $(2{,}0)$ er kandidat til globalt ekstremalpunkt, der $f(2{,}0) = 12$.

3) Linjestykket *EC*: Her er $y = 4$.

$f(x,4) = x^2 + 4x - 16 = g(x)$. Vi har at $g'(x) = 2x + 4$. Videre er $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$. Dvs. $(-2{,}4)$ er kandidat til globalt ekstremalpunkt, der $f(-2{,}4) = -20$.

4) Linjestykket *AE*: Her er $x = -6$.

$f(-6,y) = 12 - y^2 = g(y)$. Vi har at $g'(y) = -2y$. Videre er $g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Dvs. $(-6{,}0)$ er kandidat til globalt ekstremalpunkt, der $f(-6{,}0) = 12$.

Vi undersøker så hjørnene på definisjonsområdet:

$A(-6,-2)$: Vi har at $f(-6,-2) = 8$.

$B(2,-2)$: Vi har at $f(2,-2) = 8$.

$C(2{,}4)$: Vi har at $f(2{,}4) = -4$.

$E(-6,4)$: Vi har at $f(-6,4) = -4$.

Punktene ovenfor er alle kandidater til ekstremalpunkter. I tabellen under er kandidatene listet opp, og resultatet av drøftingen er at punktet $(-2,4)$ er globalt minimumspunkt med -20 som minimumsverdi, og punktene $(-6{,}0)$ og $(2,0)$ er globale maksimumspunkter med 12 som maksimumsverdi.

(x, y)	$(-6,-2)$	$(-6,0)$	$(-6,4)$	$(-2,-2)$	$(-2,4)$	$(2,-2)$	$(2{,}0)$	$(2{,}4)$
$f(x, y)$	8	12	-4	-8	-20	8	12	-4
		Globalt maks.			Globalt min.		Globalt maks.	

c) $f(x, y)$ er deriverbar i $(1{,}0)$ fordi:

- Funksjonen *f* er definert på en åpen disk med sentrum i $(1{,}0)$.
- De partiellderiverte til f (som er gitt ved $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$) er polynom-funksjoner, og er derfor kontinuerlige for alle $(x, y) \in D$ (og da spesielt for en åpen disk med sentrum i $(1{,}0)$ som er kravet).

Den lineære approksimasjonen til *f* i punktet $(1{,}0)$ er gitt ved:

$$\underline{L(x, y)} = f(1{,}0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0)(y-0) = \underline{6x - 1}$$

$L(1.01{,}0.01) = 5{,}06.$
$f(1.01{,}0.01) = 5{,}06.$

Vi kan konkludere med at den lineære approksimasjonen i (1,0) er en meget god tilnærming til *f* i omegn om dette punktet.