MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Høst 2019

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag eksamen

$\boxed{1}$ *(Teller 17 %.)*

Beregn de ubestemte integralene

a) $\displaystyle\int t \ln t \; dt$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2} dx$

Løsning:

$$\begin{aligned}\int t\log(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}t^2\log(t) - \int \frac{1}{2}t^2\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t^2\log(t) - \int t\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(t^2\log(t) - \frac{1}{2}t^2 + C\right) = \frac{1}{2}t^2\log(t) - \frac{1}{4}t^2 + C'\end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$\boxed{2}$ *(Teller 33 %.)*

En populasjon av krattspissmus består av tre aldersklasser: nullåringer, ettåringer og toåringer. Vanligvis får krattspissmus ingen unger i løpet av det første året. Tre fjerdedeler overlever sitt første leveår. Som ettåringer får de i gjennomsnitt fem unger. En tredjedel overlever sitt andre leveår. Som toåringer får de i gjennomsnitt to unger. (I denne oppgaven betrakter vi kun dyr av hunkjønn).

a) Sett opp en Lesliematrise L som beskriver utviklingen av denne populasjonen.

b) Matrisen L har en egenverdi med tilhørende egenvektor $\begin{bmatrix}16\\6\\1\end{bmatrix}$. Finn egenverdien tilhørende denne egenvektoren. Vis utregning.

c) Hvis populasjonen begynner med 80 nullåringer, 30 ettåringer og 5 toåringer, hvor mange år vil det ta før populasjonen er minst fem ganger så stor som i begynnelsen?

d) Anta at vi ikke vet noe om startdistribusjonen av individer i de tre alderklassene. Analyser L for å finne ut og beskrive hvordan det vil gå med populasjonen av krattspissmus i det lange løp.

Løsning:
Den Leslie-matrisen er
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$
hvor tallene til den første rada kommer fra antallet av ung og de nedre tallene kommer fra overlevingsbrøker.

Egenverdien λ regnes ut fra
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Man kan regne ut hvilken som helst rad man vil; den tredje er ikke vanskelig og gir $0 \cdot 16 + \frac{1}{3} \cdot 6 + 0 \cdot 1 = \lambda \cdot 1 \iff \lambda = 2$. (De andre radene gir den samme verdien til λ.)

Vi har $\begin{bmatrix} 80 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, så $\begin{bmatrix} 80 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix}$ er også en egenvektor knyttet til egenverdien $\lambda = 2$. Etter n år har vi
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 80 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix} = \lambda^n \begin{bmatrix} 80 \\ 30 \\ 5 \end{bmatrix}$$
og $\lambda^n = 2^n \geq 5$ når $n \geq 3$ (her er n en heltall). Det tar tre år.

(Løsninga kan også finnes med å regne ut matriseregninger. Det er ikke nødvendig å bruke egenverdien.)

For å analysere det som skjer i det lange løp, må man finne ut den største egenverdi og egenvektor knyttet til det. Den karakteriske likninga til Leslie-matrisen er, når vi setter den å være lik null, gir
$$\begin{aligned} 0 = \det(L - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 5 & 2 \\ \frac{3}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{bmatrix} &= (-\lambda)^3 - 5\left(\frac{3}{4} \cdot (-\lambda)\right) + 2\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= -\lambda^3 + \frac{15}{4}\lambda + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
Vi vet allerede, at $\lambda = 2$ er en egenverdi. Derfor kan den karakteriske likninga deles med polynomet $\lambda - 2$:
$$\begin{array}{r|l} & -\lambda^2 \quad - 2\lambda - \frac{1}{4}. \\ \hline \lambda - 2 & -\lambda^3 \qquad\qquad + \frac{15}{4}\lambda + \frac{1}{2} \\ & \lambda^3 - 2\lambda^2 \\ \hline & \quad -2\lambda^2 + \frac{15}{4}\lambda \\ & \quad 2\lambda^2 \quad - 4\lambda \\ \hline & \qquad -\frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{2} \\ & \qquad \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{2} \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nå kan vi finne rutene til polynomet $-\left(\lambda^2+2\lambda+\frac{1}{4}\right)$. De er (via ABC-formelen) $\lambda = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Det gir egenverdiene $\lambda_1 = -1-\sqrt{3}/2$, $\lambda_2 = -1+\sqrt{3}/2$ og $\lambda_3 = 2$ og den største er λ_3, så det er dominerende. I det lange løp skal populasjon dobble hvert år og det vil være omkring seksten nullåringer og seks ettåringer for hver toåringer is populasjonen, fordi egenvektoren knyttet til den dominerende egenverdien er lik $\begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{3}$ *(Teller 25 %.)*

La $N(t)$ betegne størrelsen på en populasjon ved tiden t. Vi modellerer populasjonen med den logistiske differensiallikningen

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right),$$

der $r = 15$ og $K = 1000$.

a) Finn eventuelle likevektsløsninger for differensiallikningen og avgjør om de er stabile eller ustabile. Begrunn svaret.

b) Verifiser at den generelle løsningen av differensiallikningen er lik

$$N(t) = \frac{1000}{1-Ce^{-15t}}.$$

c) Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som svarer til initialbetingelsen $N(0) = 10$.

Løsning:

Likevektene er punkt N med $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0$, eller $rN\left(1-\frac{N}{K}\right) = 0$. Det vil si at det finnes to likevekter, $N_1 = 0$ og $N_2 = K = 1000$. Begge likevekter er positive eller null, som populasjonen må være.

For å se stabilitet av likevektene skriver vi $g(N) = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$ og regner ut $g'(N_1)$ og $g'(N_2)$. Vi har

$$g'(N) = r\left(1-2\frac{N}{K}\right)$$

og så $g'(N_1) = g'(0) = r > 0$ og $g'(N_2) = g'(K) = -r < 0$. Den mindre likevekta $N_1 = 0$ er labil (ustabil), mens den større likevekta $N_2 = K$ er stabil.

For å sjekke den generelle løsninga vi begynner med å ta en deriverte av

$$N(t) = \frac{1000}{1-e^{-15t}/C}$$

og får, med hjelp av kjerneregelen (to ganger),

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\frac{1000}{(1-e^{-15t}/C)^2}\cdot\frac{-1}{C}e^{-15t}\cdot(-15) = 15\cdot\frac{1000}{1-e^{-15t}/C}\cdot\frac{-e^{-15t}}{C\,(1-e^{-15t}/C)}.$$

Men vi også har

$$rN\left(1-\frac{N}{K}\right)=15\cdot\frac{1000}{1-e^{-15t}/C}\left(1-\frac{1000}{1000\,(1-e^{-15t}/C)}\right).$$

Disse to er faktisk den samme uttrykken. Bare de siste termene ser ut forskjellige, så vi ser på dem:

$$1-\frac{1000}{1000\,(1-e^{-15t}/C)}=1-\frac{1}{1-e^{-15t}/C}=\frac{1-e^{-15t}/C-1}{1-e^{-15t}/C}=\frac{-e^{-15t}}{C\,(1-e^{-15t}/C)}.$$

Så har vi vist at vi har

$$N(t)=\frac{1000}{1-e^{-15t}/C}.$$

For å finne ei løsning med $N(0)=10$, må vi velge den riktige verdien til C. Vi skriver ut $N(0)=10$:

$$10=N(0)=\frac{1000}{1-e^{-15\cdot 0}/C}=\frac{1000}{1-1/C}.$$

Vi deler begge sider med 10 og ganger dem med $(1-1/C)$ og så får

$$1-1/C=100 \iff \frac{C-1}{C}=100 \iff C-1=100C \iff -1=99C.$$

Så vi må ha $C=-1/99$ og likninga er

$$N(t)=\frac{1000}{1+99e^{-15t}}.$$

Det er sant at $N(0)=10$ i denne likninga.

$\boxed{4}$ *(Teller 25 %.)*

Betrakt funksjonen

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2-6xy-3y$$

på det lukkede og begrensede området

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\leq x\leq 0 \text{ og } -1\leq y\leq 0\right\}.$$

Grafen til f er vist i Vedlegg 1.

a) Finn og klassifiser eventuelle kritiske punkt for f på D.

b) Finn globale maksimums- of minimumspunkt for f på D.

c) Betrakt funksjonen g som er definert på hele $\mathbb{R}^2$, men har det samme uttrykket som f, dvs.

$$g(x,y)=\frac{1}{2}x^2-6xy-3y.$$

Finn et punkt (x_1,y_1) slik at $g(x_1,y_1)\leq -3000$ og et annet punkt (x_2,y_2) slik at $g(x_2,y_2)\geq 3000$.

Løsning:
De kritiske punkta defineres av $\nabla f(x,y) = 0$. Vi har

$$\nabla f(x,y) = (x - 6y, -6x - 3).$$

Nå $-6x - 3 = 0$ hvis og bare hvis $x = -1/2$, og så $x - 6y = -1/2 - 6y = 0$ hvis og bare hvis $y = -1/12$. Så det eneste kritiske punktet er $(x,y) = (-1/2, -1/12) \in D$.

For å finne maksimums- og minimumspunkta er det nok at se på kritiske punkt av f og verdier av f på grensen av området. Området er en kvadrat, så grensen har fire deler som kan betraktes separat.

- $$f(-1/2, -1/12) = 1/8$$
  (eller man kan sjekke, at punktet er et sadelpunkt, som betyr at det kan være hverken et minimum eller et maksimum)
- Grensen med $x = 0$: Her $f(0,y) = -3y$, som har minimum 0 og maksimum 3 når $-1 \leq y \leq 0$.
- Grensen med $x = -1$: Her $f(-1,y) = 1/2 + 3y$ med minimum $-5/2$ og maksimum $1/2$ når $-1 \leq y \leq 0$.
- Grensen med $y = 0$: Her $f(x,0) = x^2/2$ med minimum 0 og maksimum $1/2$ når $-1 \leq x \leq 0$.
- Grensen med $y = -1$: Her
  $$f(x,-1) = x^2/2 + 6x + 3,$$
  og $\partial_x f(x,-1) = x + 6 > 0$, så $f(x,-1)$ er en økende funksjon av x. Det har minimum $f(-1,-1) = -5/2$ og maksimum $f(0,-1) = 3$.

Nå ser vi at den globale maksimum er den største av verdiene til funksjonen som vi har regnet, dvs. 3, med $f(0,-1) = 3$. Den globable minimum er den minste, dvs. $-5/2 = -2{,}5$; med $f(-1,-1) = -5/2$.

For å finne punkt hvor g tar stor eller lille verdi, er det letteste å sette $x = 0$, så funksjonen er $g(0,y) = -3y$. Ved å velge $y = \pm 1000$ kan man finne punkta. Ellers $y = 0$ og $x = 100$ gir $g(100,0) = 5000 \geq 3000$ og $g(100,100) = -5800 \leq -3000$. Mange andre eksempler finnes.