NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0002 Brukerkurs i matematikk B**

Faglig kontakt under eksamen: Heidi Strømskag

Tlf: 98 44 18 39

Eksamensdato: August 2019

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 *(Teller 17 %.)*

Beregn de ubestemte integralene

a) $\displaystyle\int t \ln t \; dt$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{4+x^2} dx$

Oppgave 2 *(Teller 33 %.)*

En populasjon av krattspissmus består av tre aldersklasser: nullåringer, ettåringer og toåringer. Vanligvis får krattspissmus ingen unger i løpet av det første året. Tre fjerdedeler overlever sitt første leveår. Som ettåringer får de i gjennomsnitt fem unger. En tredjedel overlever sitt andre leveår. Som toåringer får de i gjennomsnitt to unger. (I denne oppgaven betrakter vi kun dyr av hunkjønn).

a) Sett opp en Lesliematrise L som beskriver utviklingen av denne populasjonen.

b) Matrisen L har en egenverdi med tilhørende egenvektor $\begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finn egenverdien tilhørende denne egenvektoren. Vis utregning.

c) Hvis populasjonen begynner med 80 nullåringer, 30 ettåringer og 5 toåringer, hvor mange år vil det ta før populasjonen er minst fem ganger så stor som i begynnelsen?

d) Anta at vi ikke vet noe om startdistribusjonen av individer i de tre alderklassene. Analyser L for å finne ut og beskrive hvordan det vil gå med populasjonen av krattspissmus i det lange løp.

Oppgave 3 *(Teller 25 %.)*

La $N(t)$ betegne størrelsen på en populasjon ved tiden t. Vi modellerer populasjonen med den logistiske differensiallikningen

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

der $r = 15$ og $K = 1000$.

a) Finn eventuelle likevektsløsninger for differensiallikningen og avgjør om de er stabile eller ustabile. Begrunn svaret.

b) Verifiser at den generelle løsningen av differensiallikningen er lik

$$N(t) = \frac{1000}{1 - Ce^{-15t}}.$$

c) Finn den spesielle løsningen av differensiallikningen som svarer til initialbetingelsen $N(0) = 10$.

Oppgave 4 *(Teller 25 %.)*

Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 6xy - 3y$$

på det lukkede og begrensede området

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ og } -1 \leq y \leq 0\right\}.$$

Grafen til f er vist i Vedlegg 1.

a) Finn og klassifiser eventuelle kritiske punkt for f på D.

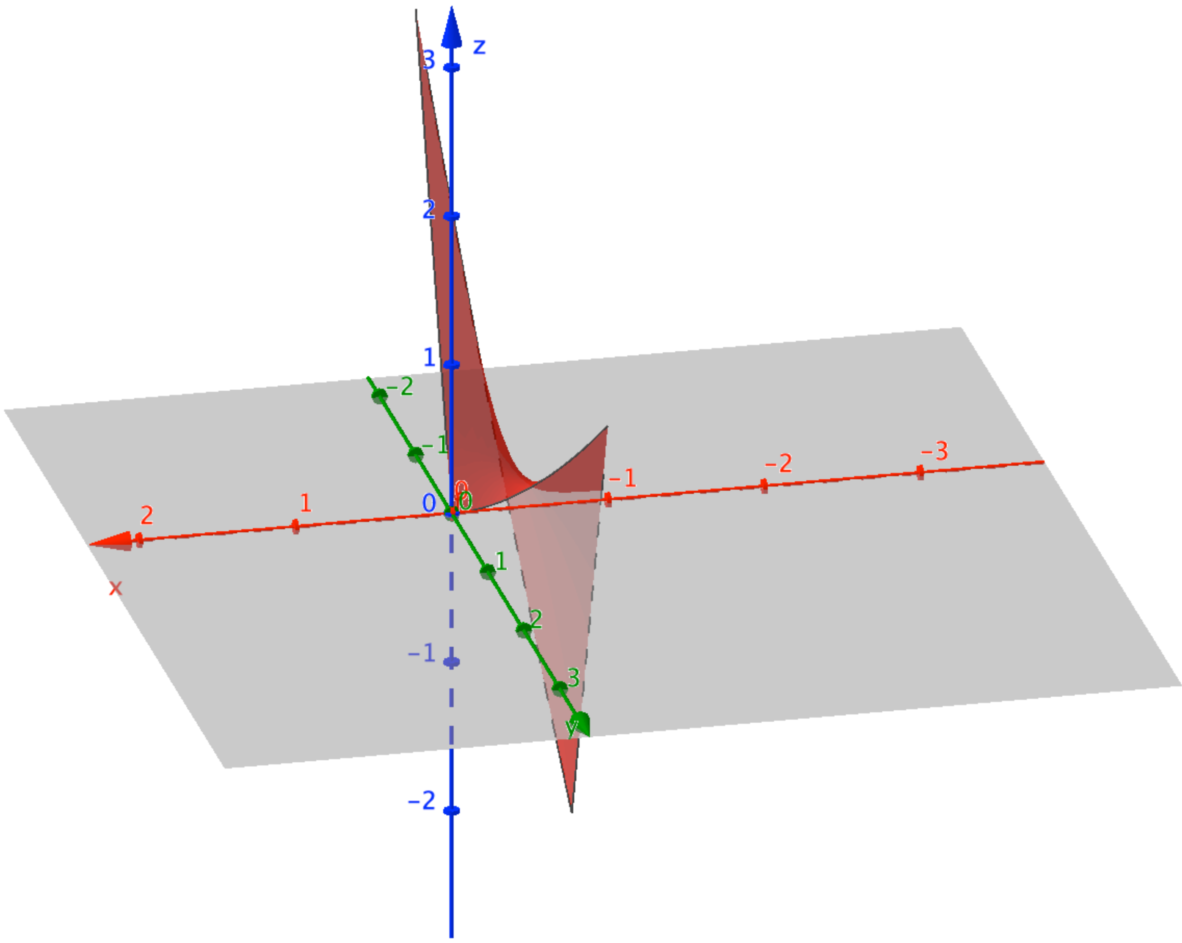
b) Finn globale maksimums- of minimumspunkt for f på D.

c) Betrakt funksjonen g som er definert på hele $\mathbb{R}^2$, men har det samme uttrykket som f, dvs.

$$g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - 6xy - 3y.$$

Finn et punkt (x_1, y_1) slik at $g(x_1, y_1) \leq -3000$ og et annet punkt (x_2, y_2) slik at $g(x_2, y_2) \geq 3000$.

VEDLEGG 1 – Eksamen MA0002 August 2019



VEDLEGG 2 – Formelark MA0002 August 2019

Et ubestemt integral

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(x) + C$$

Klassifisering av kritiske punkter

Anta at (a, b) er et kritisk punkt for $f(x, y)$, og at de andreordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om (a, b).

Hessematrisen til f i (a, b) er gitt ved:

$$Hf(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Da kan vi bruke en test for å klassifisere det kritiske punktet (kalt andreordens partiellderivert-testen):

1) Hvis det $Hf(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, så er (a,b) et lokalt minimumspunkt.
2) Hvis det $Hf(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, så er (a,b) et lokalt maksimumspunkt.
3) Hvis det $Hf(a,b) < 0$, så er (a,b) et sadelpunkt.
4) Hvis det $Hf(a,b) = 0$, så gir testen ingen informasjon om det kritiske punktet.

System av differensiallikninger

La følgende system av differensiallikninger være gitt

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t),$$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ har to reelle, distinkte egenverdier λ_1 og λ_2 med korresponderende egenvektorer $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Da vil den generelle løsningen av systemet være gitt ved:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}$, der c_1 og c_2 er konstanter som avhenger av startbetingelsene.