NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0002 Brukerkurs i matematikk B**

Faglig kontakt under eksamen: Heidi Strømskag

Tlf: 98 44 18 39

Eksamensdato: 8. juni 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

Sonja har en hvilepuls på 70 slag/min. Hun gjør en anstrengende fysisk øvelse og måler pulsen i det hun avslutter øvelsen til å være 172 slag/min. Etterpå står hun i ro, og måler pulsen etter 30 sekunder. Da er den 152 slag/min.

a) La $S(t)$ betegne Sonjas puls som funksjon av tiden t (sekunder) etter at hun avsluttet øvelsen. Finn et uttrykk for $S(t)$ når du får vite at endringsraten til pulsen hennes er proporsjonal med differansen mellom den aktuelle pulsen og hvilepulsen.

b) Beregn hva Sonjas puls vil være ett minutt etter at hun avsluttet øvelsen. Beregn hva endringsraten til pulsen hennes vil være i dette tidspunktet (oppgi svaret med benevning).

Oppgave 2

En spesiell koloni av flaggermus—der vi kun betrakter individer av hunkjønn—har en levealder på mindre enn tre år. Individene er inndelt i tre årskull: 0-åringer, 1-åringer og 2-åringer. Det er slik at 0-åringene ikke får noe avkom, hver 1-åring får i gjennomsnitt 2 avkom per år, og hver 2-åring får i gjennomsnitt 1 avkom per år. Videre er det slik at overlevelsesraten for 0-åringene er lik 40 %, og for 1-åringene er den lik 50 %. Ved starten har kolonien 300 0-åringer, 180 1-åringer og 130 2-åringer.

a) Sett opp en Lesliematrise som representerer opplysningene gitt ovenfor, og finn fordelingen av flaggermus i de tre årskullene etter to år.

b) Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi til Lesliematrisen. Finn de andre egenverdiene, samt egenvektoren tilhørende $\lambda = 1$.

c) Forklar hvordan det vil gå med denne flaggermuskolonien i det lange løp når du får vite at antall 0-åringer vil stabilisere seg på 400 individer. Begrunn svaret.

Oppgave 3

Betrakt funksjonen

$$f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$$

på det lukkede og begrensede området

$$D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 0 \text{ og} - 1 \leq y \leq 1\}.$$

a) Finn globale maksimums- og minimumspunkter for f på D. Begrunn at punktet $(-1, 0)$ er et sadelpunkt.

b) Begrunn hvorfor $f(x, y)$ er deriverbar i punktet $(0, 0)$, og finn den lineære approksimasjonen til $f(x, y)$ i $(0, 0)$. Bruk dette til å finne en approksimasjon til $f(0.1, 0.1)$. Sammenlikn approksimasjonen med den eksakte verdien av $f(0.1, 0.1)$.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av systemet av differensiallikninger som er gitt nedenfor.

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1(t) + 3x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1(t) - 4x_2(t)$$

b) Finn den spesielle løsningen av systemet i (a) under startbetingelsene $x_1(0) = 5$ og $x_2(0) = -10$.

c) Retningsfeltet til systemet i (a) er gitt i Vedlegg 2. Bruk dette og skisser linjene som korresponderer med egenvektorene og løsningskurven som svarer til startbetingelsene i (b). Vedlegget med inntegnede linjer og løsningskurve skal leveres inn som del av eksamensbesvarelsen.

VEDLEGG 1 – Formelark MA0002 08.06.2018

Klassifisering av kritiske punkter

Anta at (a, b) er et kritisk punkt for $f(x, y)$, og at de andreordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om (a, b).

Hessematrisen til f i (a, b) er gitt ved:

$$Hf(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Da kan vi bruke en test for å klassifisere det kritiske punktet (kalt andreordens partiellderivert-testen):

1) Hvis det $Hf(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, så er (a, b) et lokalt minimumspunkt.
2) Hvis det $Hf(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, så er (a, b) et lokalt maksimumspunkt.
3) Hvis det $Hf(a, b) < 0$, så er (a, b) et sadelpunkt.
4) Hvis det $Hf(a, b) = 0$, så gir testen ingen informasjon om det kritiske punktet.

System av differensiallikninger

La følgende system av differensiallikninger være gitt

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t),$$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ har to reelle og distinkte egenverdier λ_1 og λ_2 med korresponderende egenvektorer $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Den generelle løsningen av dette systemet er gitt ved:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}$, der c_1 og c_2 er konstanter som avhenger av startbetingelsene.

Kandidatnummer: ___________________

VEDLEGG 2 – Retningsfelt Oppgave 4 MA0002 08.06.2018