NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Eksamen august 2018 — **Løsningsforslag**

Oppgave 1

La $P(t)$ betegne antall individer i en populasjon ved tiden t (år). Populasjonens bæreevne er lik 500 og $P(0) = 50$. Populasjonen utvikler seg etter en logistisk vekstmodell gitt ved differensiallikningen:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}8P(1 - \frac{P}{500})$$

a) Vis ved å løse differensiallikningen at $P(t) = \frac{500}{1+9e^{-0{,}8t}}$.

Løsning:

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}8P\left(1 - \frac{P}{500}\right) \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = 0{,}0016P(500 - P) \Leftrightarrow \frac{dP}{P(500 - P)} = 0{,}0016dt$$

Vi bruker delbrøkoppspalting for å omgjøre brøken på venstre side til en sum av to brøker med lineære nevnere:

$$\frac{1}{P(500-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{500-P} \Leftrightarrow \frac{1}{P(500-P)} = \frac{A(500-P)+BP}{P(500-P)}$$

$$\Leftrightarrow A(500 - P) + BP = 1 \Leftrightarrow 500A = 1 \text{ og } A + B = 0 \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{500}$$

Dvs. delbrøkoppspaltingen har gitt oss denne likheten: $\frac{dP}{P(500-P)} = \frac{1}{500}\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{500-P}\right)$

Vi løser så differensiallikningen ved å integrere på begge sider:

$$\frac{1}{500}\int\left(\frac{1}{P} + \frac{1}{500-P}\right)dP = \int 0{,}0016dt \Leftrightarrow \ln|P| - \ln|500 - P| = 500 \cdot 0{,}0016t + C_1$$

$\Leftrightarrow \ln\left|\frac{P}{500-P}\right| = 0{,}8t + C_1$. Fordi $P > 0$ og $500 - P > 0$ kan vi sløyfe absoluttverditegnet og får:

$\ln\left|\frac{P}{500-P}\right| = 0{,}8t + C_1(P) \iff \ln\frac{P}{500-P} = 0{,}8t + C_1 \iff e^{\ln\frac{P}{500-P}} = e^{0{,}8t+C_1}$

$\iff \frac{P}{500-P} = Ce^{0{,}8t} \iff P = Ce^{0{,}8t}(500-P) \iff (1+Ce^{0{,}8t})P = 500Ce^{0{,}8t}$

$\iff P(t) = \frac{500Ce^{0{,}8t}}{1+Ce^{0{,}8t}}$.

Vi bestemmer C ved hjelp av startbetingelsen $P(0) = 50$:

$\frac{500C}{1+C} = 50 \iff \frac{C}{1+C} = \frac{1}{10} \iff C = \frac{1}{9}$.

Dvs. $P(t) = \frac{\frac{500}{9}e^{0{,}8t}}{1+\frac{1}{9}e^{0{,}8t}}$. Vi multipliserer teller og nevner med $9e^{-0{,}8t}$ og får

$\underline{P(t) = \frac{500}{1+9e^{-0{,}8t}}}$ (som vi skulle vise).

b) For hvilken størrelse på populasjonen er vekstraten størst? Etter hvor mange år inntreffer dette, og hva er vekstraten i dette tidspunktet? (Oppgi vekstraten med benevning).

Løsning:

For å finne en ekstremalverdi for vekstraten til P deriverer vi $\frac{dP}{dt}$ og finner nullpunktet for den deriverte, altså løser likningen $\frac{d^2P}{dt^2} = 0$.

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}8P\left(1 - \frac{P}{500}\right) = 0{,}0016P(500-P) = 0{,}8P - 0{,}0016P^2$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = 0{,}8 - 0{,}0032P$$

$0{,}8 - 0{,}0032P = 0 \iff P = 250$.

Fordi $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$ for $0 < P < 250$ og $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$ for $250 < P < 500$, vil $P = 250$ være en maksimalverdi for vekstraten. (Man kan vise generelt for en logistisk vekstmodell at maksimal vekstrate oppnås når populasjonens størrelse er lik halvparten av bæreevnen. Det er imidlertid ikke noe krav om å vise det generelle resultatet i denne oppgaven.)

Vi setter inn $P = 250$ i differensiallikningen og får:

$\frac{dP}{dt}(250) = 0{,}8 \cdot 250 \cdot 0{,}5 = 100$ (individer/år).

For å finne hvilket år dette inntraff løser vi likningen: $\frac{500}{1+9e^{-0{,}8t}} = 250 \iff t \approx 2{,}75$.

Det vil si at etter 2,75 år (2 år og 9 mnd) har populasjonen 250 individer; da er vekstraten på sitt maksimale med en vekst på 100 individer per år.

Oppgave 2

Levealderen til en spesiell art av pattedyr, der vi kun betrakter antall hunner, er høyst to år. Kun $\frac{1}{3}$ overlever og blir 1-åringer. Videre er det slik at de som er under 1 år føder i gjennomsnitt $\frac{5}{3}$ avkom, og de mellom 1 og 2 år føder i gjennomsnitt 12 avkom. Ved starten har kolonien 120 individer under 1 år og 80 individer mellom 1 og 2 år.

a) Sett opp en Lesliematrise som representerer opplysningene gitt ovenfor, og finn fordelingen av individer i de to årskullene etter to år (rund av til nærmeste hele tall).

Løsning:

Lesliematrise: $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

Fordeling etter ett år: $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 120 \\ 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1160 \\ 40 \end{bmatrix}$

Fordeling etter to år: $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1160 \\ 40 \end{bmatrix} \approx \underline{\begin{bmatrix} 2413 \\ 387 \end{bmatrix}}$

b) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi til Lesliematrisen. Finn den andre egenverdien, samt egenvektoren tilhørende $\lambda = 3$.

Løsning:

Finner egenverdiene til L:

$$\det(L - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{5}{3}\lambda - 4 = 0$$

Bruker abc-formelen og finner løsningene av likningen; disse er egenverdiene til matrisen:

$$\lambda = \frac{\frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} + 4^2}}{2} \Leftrightarrow \underline{\lambda_1 = 3 \text{ og } \lambda_2 = -\frac{4}{3}}$$

Finner egenvektoren tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 3$:

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (L - \lambda_1 I_2) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løser dette likningssystemet ved å foreta elementære radoperasjoner på matrisen $L - \lambda_1 I_2$:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 12 \\ \frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} R1 \\ R2 \end{array} \qquad R1 \rightarrow -\tfrac{3}{4} R1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ \frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R3 \\ R2 \end{array} \qquad R2 \rightarrow R2 - \tfrac{1}{3} R3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at

$u_1 = 9u_2$

$0u_2 = 0$

Vi setter $u_2 = t$ og får at

$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$ for $t \neq 0$.

Vi velger $t = 1$ og får egenvektoren $\boldsymbol{u} = \underline{\begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}}$ (tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 3$).

c) Forklar så detaljert som mulig hvordan vil det gå med denne populasjonen i det lange løp. Anta at det totale antall individer ved starten var 200. Hva måtte startfordelingen i de to årskullene ha vært dersom fordelingen skulle ha vært konstant fra år til år?

Løsning:

Vi har at $|\lambda_2| < \lambda_1$. Altså er $\lambda_1 = 3$ *dominant* egenverdi til Lesliematrisen, noe som medfører at egenverdien $\lambda_1 = 3$ er vekstparameteren til populasjonen. Dette betyr at for store *t*–verdier vil antall individer i hvert årskull bli tre ganger så stort for hvert år. Populasjonen vil derfor vokse mot uendelig i det lange løp. Egenvektoren tilhørende den dominerende egenverdien medfører at populasjonen i det lange løp vil få en stabil aldersfordeling på 9:1.

Med en startpopulasjon på 200 individer måtte startfordelingen ha vært 180 individer under 1 år og 20 individer mellom 1 og 2 år, dersom fordelingen skulle ha vært konstant fra år til år: $\frac{200}{9+1}\cdot 1 = \underline{20}$ (individer under 1 år) og $\frac{200}{9+1}\cdot 9 = \underline{180}$ (individer mellom 1 og 2 år).

Oppgave 3

Betrakt funksjonen

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^4$$

definert på $\mathbb{R}^2$.

a) Finn og klassifiser funksjonens kritiske punkter.

Løsning:

Vi finner kritiske punkter:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x - 3y \\ -3x + 4y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dvs. vi må løse likningssystemet:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ -3x + 4y^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{4}y \\ x &= \frac{4}{3}y^3 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4}y = \frac{4}{3}y^3 \;\Leftrightarrow\; y\left(\frac{4}{3}y^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \text{ eller } y^2 = \frac{9}{16} \;\Leftrightarrow\; y = \pm\frac{3}{4}$$

Dette gir tre kritiske punkter:

$$(0,0) \quad \left(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) \quad \left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right)$$

Vi karakteriserer de kritiske punktene ved hjelp av andreordens partiellderivert-testen:

Hessematrisen H for f i (x,y) er gitt ved:

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

1) Punktet $(0,0)$:

$\det Hf(0,0) = -9 < 0 \Longrightarrow$ <u>Punktet $(0,0)$ er et sadelpunkt</u>, koordinater (0,0,0).

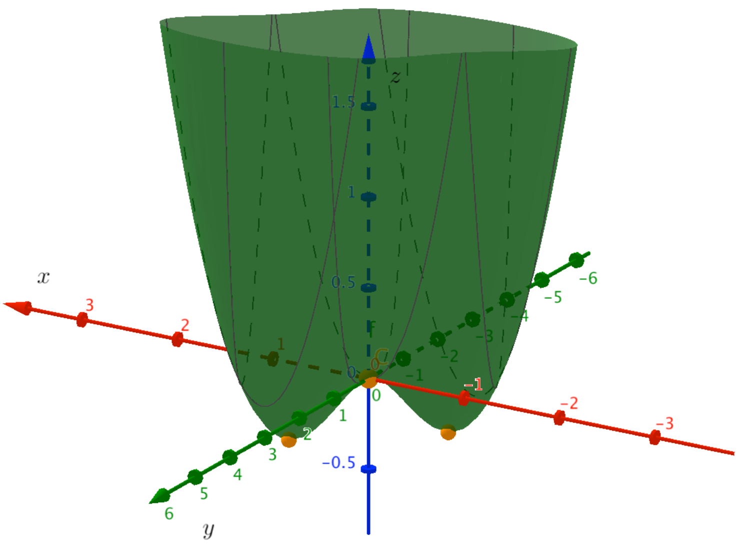
2) Punktet $\left(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$:

$\det Hf\left(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = 18 > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow$ Punktet $\left(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right)$ er et <u>lokalt minimumspunkt</u> på grafen til *f*. Minimumsverdi: $f\left(-\frac{9}{16}, -\frac{3}{4}\right) = -\frac{81}{256}$.

3) Punktet $\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right)$:

$\det Hf\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right) = 18 > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right) = 4 > 0 \Longrightarrow$ Punktet $\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right)$ er et <u>lokalt minimumspunkt</u> på grafen til *f*. Minimumsverdi: $f\left(\frac{9}{16}, \frac{3}{4}\right) = -\frac{81}{256}$.

Grafen til *f* er vist på figuren nedenfor. De oransje punktene viser de kritiske punktene på flaten. (Det er ikke krav i oppgaven om å tegne flaten).



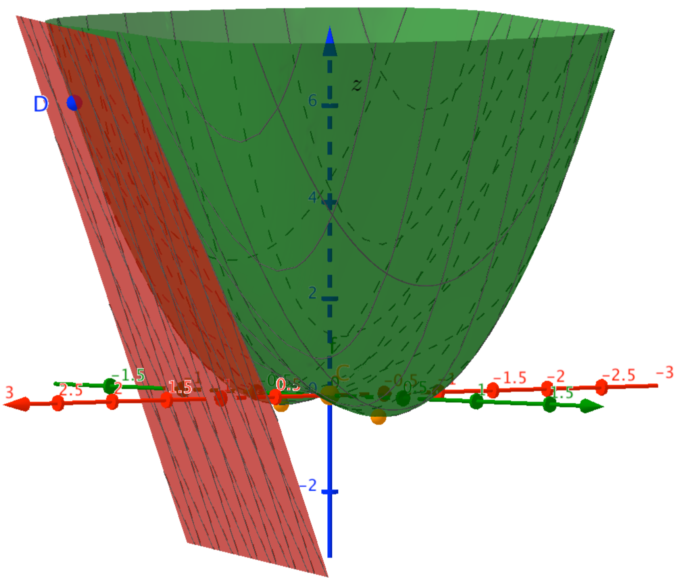
b) Finn den lineære approksimasjonen til $f(x, y)$ i $(1, -1)$ og bruk den til å finne en approksimasjon til $f(1.1, -1{,}1)$. Sammenlikn approksimasjonen med den eksakte verdien av $f(1.1, -1{,}1)$.

Løsning:

Den lineære approksimasjonen til *f* i punktet $(1, -1)$ er gitt ved:

$$L(x, y) = f(1, -1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1)(y + 1) = 6 + 7x - 7 - 7y - 7$$
$$= \underline{-8 + 7x - 7y}$$

$L(1.1, -1,1) = 7,4$
$f(1.1, -1.1) = 7,5141$. Dvs. den lineære approksimasjonen i $(1, -1)$ er en ganske god tilnærming til f i omegn om dette punktet. Figuren nedenfor viser tangentplanet til grafen til f når $(x, y) = (1, -1)$. (Det er ikke krav i oppgaven om å tegne dette). Tangeringspunktet på flaten er $D(1, -1,6)$.



Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av systemet av differensiallikninger som er gitt nedenfor.

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_2(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) + 3x_2(t)$$

Løsning:
Vi finner egenverdier med tilhørende egenvektorer til koeffisientmatrisen $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Egenverdiene er løsninger av likningen $\det(A - \lambda I_2) = 0$.

$A - \lambda I_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix}$.

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \iff -\lambda(3 - \lambda) + 2 = 0 \iff \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff \lambda_1 = 1 \; og \; \lambda_2 = 2$.

Egenvektoren $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ tilhørende $\lambda_1 = 1$ er løsning (forskjellig fra nullvektor) av matriselikningen:

$(A - I_2)\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Radreduksjon av matrisen gir $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ som betyr at

$u_1 - 2u_2 = 0$ og $0u_2 = 0$. Vi setter $u_2 = s$. Dette gir følgende løsning:

$u_1 = 2s$
$u_2 = s$
Dvs. $\boldsymbol{u} = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, s \neq 0$. Vi velger $s = 1$ og får egenvektoren $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 1$.

Tilsvarende får vi egenvektoren $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tilhørende egenverdien $\lambda_2 = 2$.

Dette gir (jf. formelark) den generelle løsningen av det lineære systemet:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underline{c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$, der c_1 og c_2 er konstanter som avhenger av startbetingelsene.

b) Finn den spesielle løsningen av systemet i (a) under startbetingelsene $x_1(0) = 6$ og $x_2(0) = 2$.

Løsning:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 6 = 2c_1 + c_2 \\ 2 = c_1 + c_2 \end{matrix} \Leftrightarrow c_1 = 4 \text{ og } c_2 = -2.$$

Dvs. den spesielle løsningen som tilfredsstiller startebetingelsene er gitt ved:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \underline{4e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}.$

c) Retningsfeltet til systemet i (a) er gitt i Vedlegg 2. Bruk dette og skisser linjene som korresponderer med egenvektorene og løsningskurven som svarer til startbetingelsene i (b). Vedlegget med inntegnede linjer og løsningskurve skal leveres inn som del av eksamensbesvarelsen.

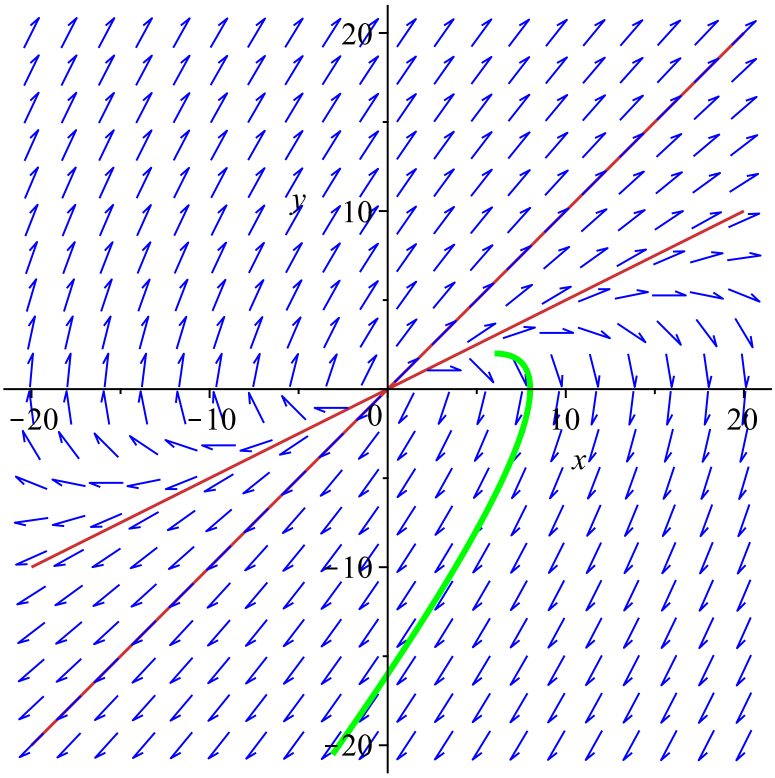
Løsning:

Retningsfelt med inntegnede linjer og løsningskurve er vist på neste side.

d) Beskriv likevektspunktet (0,0) til systemet med tanke på dets stabilitet. Begrunn svaret.

Løsning:

Likevektspunktet (0,0) er ustabil (det er en kilde), fordi begge egenverdiene er positive.
Dette følger av at $e^t \to \infty$ når $t \to \infty$ og $e^{2t} \to \infty$ når $t \to \infty$. At det er en kilde, kan vi også se ut fra retningsvektorene rundt likevektspunktet; de går ut fra origo.



Løsning av Oppgave 4 c)

VEDLEGG 1 – Formelark MA0002 august 2018

Klassifisering av kritiske punkter

Anta at (a, b) er et kritisk punkt for $f(x, y)$, og at de andreordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om (a, b).

Hessematrisen til f i (a, b) er gitt ved:

$$Hf(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Da kan vi bruke en test for å klassifisere det kritiske punktet (kalt andreordens partiellderivert-testen):

1) Hvis det $Hf(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, så er (a,b) et lokalt minimumspunkt.
2) Hvis det $Hf(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, så er (a,b) et lokalt maksimumspunkt.
3) Hvis det $Hf(a,b) < 0$, så er (a,b) et sadelpunkt.
4) Hvis det $Hf(a,b) = 0$, så gir testen ingen informasjon om det kritiske punktet.

System av differensiallikninger

La følgende system av differensiallikninger være gitt

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t),$$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ har to reelle og distinkte egenverdier λ_1 og λ_2 med korresponderende egenvektorer $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Den generelle løsningen av dette systemet er gitt ved:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}$, der c_1 og c_2 er konstanter som avhenger av startbetingelsene.