NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0002 Brukerkurs i matematikk B**

Faglig kontakt under eksamen: Heidi Strømskag

Tlf: 98 44 18 39

Eksamensdato: August 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato   Sign

Oppgave 1

La $P(t)$ betegne antall individer i en populasjon ved tiden t (år). Populasjonens bæreevne er lik 500 og $P(0) = 50$. Populasjonen utvikler seg etter en logistisk vekstmodell gitt ved differensiallikningen:

$$\frac{dP}{dt} = 0,8P(1 - \frac{P}{500})$$

a) Vis ved å løse differensiallikningen at $P(t) = \frac{500}{1+9e^{-0.8t}}$

b) For hvilken størrelse på populasjonen er vekstraten størst? Etter hvor mange år inntreffer dette, og hva er vekstraten i dette tidspunktet? (Oppgi vekstraten med benevning).

Oppgave 2

Levealderen til en spesiell art av pattedyr, der vi kun betrakter antall hunner, er høyst to år. Kun $\frac{1}{3}$ overlever og blir 1-åringer. Videre er det slik at de som er under 1 år føder i gjennomsnitt $\frac{5}{3}$ avkom, og de mellom 1 og 2 år føder i gjennomsnitt 12 avkom. Ved starten har kolonien 120 individer under 1 år og 80 individer mellom 1 og 2 år.

a) Sett opp en Lesliematrise som representerer opplysningene gitt ovenfor, og finn fordelingen av individer i de to årskullene etter to år.

b) Vis at $\lambda = 3$ er en egenverdi til Lesliematrisen. Finn den andre egenverdien, samt egenvektoren tilhørende $\lambda = 3$.

c) Forklar så detaljert som mulig hvordan vil det gå med denne populasjonen i det lange løp. Anta at det totale antall individer ved starten var 200. Hva måtte startfordelingen i de to årskullene ha vært dersom fordelingen skulle ha vært konstant fra år til år?

Oppgave 3

Betrakt funksjonen

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^4$$

på $\mathbb{R}^2$.

a) Finn og klassifiser funksjonens kritiske punkter.

b) Finn den lineære approksimasjonen til $f(x,y)$ i $(1,-1)$ og bruk den til å finne en approksimasjon til $f(1.1,-1.1)$. Sammenlikn approksimasjonen med den eksakte verdien av $f(1.1,-1.1)$.

Oppgave 4

a) Finn den generelle løsningen av systemet av differensiallikninger som er gitt nedenfor.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2x_2(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_1(t) + 3x_2(t) \end{aligned}$$

b) Finn den spesielle løsningen av systemet i (a) under startbetingelsene $x_1(0) = 6$ og $x_2(0) = 2$.

c) Retningsfeltet til systemet i (a) er gitt i Vedlegg 2. Bruk dette og skisser linjene som korresponderer med egenvektorene og løsningskurven som svarer til startbetingelsene i (b). Vedlegget med inntegnede linjer og løsningskurve skal leveres inn som del av eksamensbesvarelsen.

d) Beskriv likevektspunktet (0,0) til systemet med tanke på dets stabilitet. Begrunn svaret.

VEDLEGG 1 – Formelark MA0002 august 2018

Klassifisering av kritiske punkter

Anta at (a, b) er et kritisk punkt for $f(x, y)$, og at de andreordens partiellderiverte til f er kontinuerlige i en omegn om (a, b).

Hessematrisen til f i (a, b) er gitt ved:

$$Hf(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}$$

Da kan vi bruke en test for å klassifisere det kritiske punktet (kalt andreordens partiellderivert-testen):

1) Hvis det $Hf(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, så er (a,b) et lokalt minimumspunkt.
2) Hvis det $Hf(a,b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, så er (a,b) et lokalt maksimumspunkt.
3) Hvis det $Hf(a,b) < 0$, så er (a,b) et sadelpunkt.
4) Hvis det $Hf(a,b) = 0$, så gir testen ingen informasjon om det kritiske punktet.

System av differensiallikninger

La følgende system av differensiallikninger være gitt

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t),$$

der $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ har to reelle og distinkte egenverdier λ_1 og λ_2 med korresponderende egenvektorer $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Den generelle løsningen av dette systemet er gitt ved:

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u} + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}$, der c_1 og c_2 er konstanter som avhenger av startbetingelsene.

Kandidatnummer: ___________________

VEDLEGG 2 – Retningsfelt Oppgave 4 MA0002 august 2018