NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA0002 Brukerkurs i matematikk B - LØSNING

Faglig kontakt under eksamen: Frode Rønning

Tlf: 95 21 81 38

Eksamensdato: 6. juni 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

I et naturreservat er det en bestand av antiloper. Bestanden holdes konstant på 600 dyr. En dag oppdager en vokter at noen av dyrene er syke. Denne sykdommen er smittsom, og smitten overføres ved direkte kontakt mellom et dyr som er smittet og et dyr som ikke er smittet. Da sykdommen ble oppdaget ble alle dyrene undersøkt, og man fant at 15 dyr var smittet. 20 dager tidligere hadde to nye dyr blitt hentet inn til reservatet, og man mistenker at disse to var bærere av smitten.

a) Kall antall smittede dyr ved tiden t for $S(t)$, og forklar hvorfor de matematiske uttrykkene nedenfor kan være en rimelig modell for situasjonen beskrevet ovenfor.

$$\frac{dS}{dt} = kS(t)(600 - S(t)), \;\; k > 0,$$
$$S(0) = 2 \text{ og } S(20) = 15.$$

Legg vekt på å forklare koblingen mellom alle delene av de matematiske uttrykkene og situasjonen som er beskrevet.

Løsning: $\frac{dS}{dt}$ representerer endringsraten for antall smittede dyr. Siden smitten overføres ved kontakt er det rimelig å anta at endringsraten er proporsjonal med antall mulige møter mellom et smittet og et ikke-smittet dyr. Antall mulige møter er gitt ved produktet av antall smittede, $S(t)$, og antall ikke-smittede, $600 - S(t)$. Endringsraten er positiv, så $k > 0$. Dersom tiden $t = 0$ settes til tidspunktet da de antatt smittede dyrene ble innført blir $S(0) = 2$. 20 dager senere var 15 dyr smittet, så $S(20) = 15$.

b) Finn et eksplisitt uttrykk for $S(t)$ ut fra informasjonen gitt i a). Vis utregning.

Løsning:

$$\frac{dS}{dt} = kS(t)(600 - S(t)), \;\; k > 0,$$

kan skrives om til

$$\frac{dS}{S(600 - S)} = kdt$$

som ved delbrøkspalting gir

$$\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{600 - S}\right) dS = 600kdt.$$

Antiderivasjon på begge sider av likhetstegnet, og bruk av regneregler for logaritmer, gir

$$\ln\left|\frac{S}{600-S}\right| = 600kt + C_1.$$

Siden både S og $600 - S > 0$ kan vi sløyfe absoluttverditegnet og skrive

$$\ln\left(\frac{S}{600-S}\right) = 600kt + C_1.$$

Fra dette får vi videre

$$\frac{S}{600-S} = e^{600kt+C_1} = C_2 e^{600kt} \quad (\text{der } C_2 = e^{C_1})$$

Ved å løse for S og forenkle gir dette

$$S(t) = \frac{600}{1 + Ce^{-600kt}}, \quad (\text{der } C = 1/C_2)$$

$S(0) = \dfrac{600}{1+C} = 2$ gir $C = 299$. $S(20) = \dfrac{600}{1 + 299e^{-12000k}} = 15$ gir ved å løse med hensyn på k verdien $600k = 0,1018...$, dvs. $k = 1,697... \cdot 10^{-4}$. Den fullstendige løsningen blir dermed

$$S(t) = \frac{600}{1 + 299e^{-0,1018t}}.$$

c) Hvor lang tid vil det ta før halvparten av dyrene i bestanden er smittet dersom det ikke settes inn tiltak for å begrense smittespredningen?

Løsning: Sett $S(t) = \dfrac{600}{1 + 299e^{-0,1018t}} = 300$ og løs med hensyn på t. Det gir $t = -(\ln \frac{1}{299})/0,1018 = 56$ dager.

d) Hvor stor er spredningsraten for sykdommen når akkurat halvparten av dyrene er smittet? Angi svaret med enhet. Hvorfor er det ut fra situasjonen rimelig at spredningsraten på dette tidspunktet er på sitt største?

Løsning: Når $S = 300$ får vi ut fra differensiallikningen $\frac{dS}{dt} = 1,697... \cdot 10^{-4} \cdot 300 \cdot 300 = 15,3$ med enheten "dyr per dag".

Når halvparten av dyrene er smittet, er det like mange smittede som ikke-smittede dyr. Dette maksimerer antall mulige møter mellom et smittet og et ikke smittet dyr.

Oppgave 2

Funksjonen

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

er definert på det lukkede og begrensede området

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2 \text{ og } 0 \le y \le 2\}.$$

a) Finn de absolutte maksimums- og minimumsverdiene for f på D og avgjør hvilke punkter de oppnås i.

Løsning: De partielle deriverte blir $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 - y)$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 - x)$. Disse er 0 for $x^2 = y$ og $y^2 = x$. I det indre av området er dette oppfylt kun for $(x,y) = (1,1)$. Dette er da funksjonens eneste kritiske punkt i det indre av området. Funksjonsverdien i dette punktet er $f(1,1) = -1$. Dette er en kandidat til en ekstremalverdi.

Vi må så undersøke randen. Den består av fire rette linjestykker.

1. $y = 0$. Da får vi $f(x,0) = x^3$ som vokser fra verdien 0 for $x = 0$ opp til verdien 8 for $x = 2$.
2. $x = 2$. Da får vi $f(2,y) = y^3 - 6y + 8$. Kall denne $g(y)$. Vi finner $g'(y) = 3y^2 - 6$ som er lik 0 for $y = \sqrt{2}$. Funksjonsverdien her blir $f(2,\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,34$. Dette blir et lokalt minimumspunkt langs denne delen av randa. I endepunktene av denne delen av randa har vi $f(2,0) = 8$ og $f(2,2) = 4$.
3. $y = 2$. Da får vi $f(x,2) = g(x) = x^3 - 6x + 8$. Som i punktet ovenfor finner vi at denne har et lokalt minimumspunkt for $x = \sqrt{2}$ med $f(\sqrt{2},2) = g(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,34$. I endepunktene av denne delen av randa har vi $f(2,2) = 4$ og $f(0,2) = 8$.
4. $x = 0$. Da får vi $f(0,y) = y^3$ som vokser fra verdien 0 for $y = 0$ opp til verdien 8 for $y = 2$.

Samlet får vi ut fra drøftingen ovenfor at absolutt minimum for funksjonen finnes i punktet $(1,1)$ og denne verdien er $f(1,1) = -1$. Absolutt maksimum for funksjonen finnes i to punkter, $(2,0)$ og $(0,2)$ med $f(2,0) = f(0,2) = 8$.

b) Regn ut gradienten til f i punktet $(\frac{3}{2}, 1)$, og bestem vektoren $\vec{u}$ slik at den retningsderiverte $D_{\vec{u}} f(\frac{3}{2}, 1) = 0$.

Løsning: Gradienten er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(x^2 - y) \\ 3(y^2 - x) \end{bmatrix}.$$

Innsatt $(x,y) = (\frac{3}{2}, 1)$ får vi $\nabla f(\frac{3}{2}, 1) = \begin{bmatrix} 15/4 \\ -3/2 \end{bmatrix}$.

$D_{\vec{u}} f(\frac{3}{2}, 1) = \nabla f(\frac{3}{2}, 1) \cdot \vec{u} = \frac{15}{4} u_1 - \frac{3}{2} u_2$ der $\vec{u} =< u_1, u_2 >$ er en enhetsvektor. Vi får dermed at $D_{\vec{u}} f(\frac{3}{2}, 1) = 0$ når $\frac{15}{4} u_1 - \frac{3}{2} u_2 = 0$, altså når $u_2 = \frac{5}{2} u_1$. Dette gir $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{29}} < 2, 5 >$.

c) Finn likninga for tangentplanet i punktet på flata $z = f(x,y)$ der $(x,y) = (\frac{3}{2}, 1)$.

Løsning: Tangentplanet i punktet (x_0, y_0, z_0) er gitt ved

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Med $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = 1$, $z_0 = f(x_0, y_0) = -\frac{1}{8}$ og $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{15}{4}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{3}{2}$ får vi likninga

$$z + \frac{1}{8} = \frac{15}{4}(x - \frac{3}{2}) - \frac{3}{2}(y - 1)$$

som kan omskrives til

$$15x - 6y - 4z = 17.$$

Oppgave 3

a) Finn den generelle løsningen til systemet av differensiallikninger som er satt opp nedenfor.

$$\frac{dx_1}{dt} = 5x_1(t) + 2x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = x_1(t) + 6x_2(t)$$

Løsning: Vi må først finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda^2 - 11\lambda + 28} = (\lambda - \mathbf{7})(\lambda - \mathbf{4}) = \mathbf{0}$ for $\lambda_1 = 7$ og $\lambda_2 = 4$.

1. Egenvektorene som tilhører $\lambda_1 = 7$ finnes ved å løse

$$\begin{array}{lll} -2x_1 & +2x_2 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & = 0 \end{array}$$

som gir $x_1 = x_2$. Dvs. egenvektorene er gitt ved $t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

2. Egenvektorene som tilhører $\lambda_2 = 4$ finnes ved å løse

$$\begin{array}{lll} x_1 & +2x_2 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & = 0 \end{array}$$

som gir $x_1 = -2x_2$. Dvs. egenvektorene er gitt ved $t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Dette gir den generelle løsningen: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{7t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Finn den spesielle løsningen av systemet i a) under startbetingelsene $x_1(0) = 10$ og $x_2(0) = -8$.

Løsning: $x_1(0) = C_1 - 2C_2 = 10$ og $x_2(0) = C_1 + C_2 = -8$ gir verdiene $C_1 = -2$ og $C_2 = -6$. Dvs. $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = -2e^{7t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 6e^{4t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) På vedlegget ser du fire retningsfelt. Hvilket av disse svarer til systemet i a)? Begrunn svaret.

Skisser løsningskurven som svarer til løsningen i b) i det korrekte retningsfeltet sammen med egenvektorene til systemet. Skisser også løsningskurven som svarer til startbetingelsene $x_1(0) = 10$ og $x_2(0) = -2$.

Vedlegget med de inntegnede løsningskurvene og egenvektorene skal leveres inn som del av eksamensbesvarelsen.

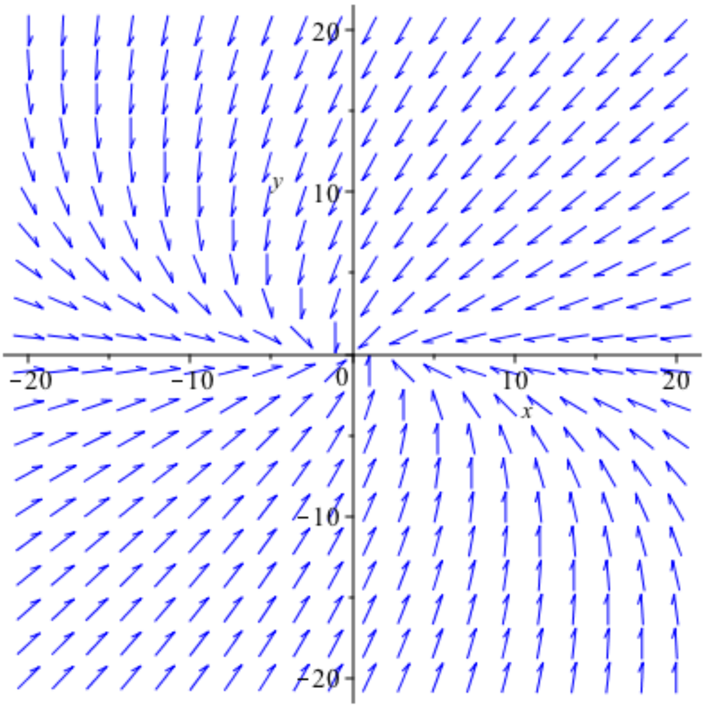
Løsning: Retningsfelt 2 er det korrekte. Siden begge egenverdiene er reelle og positive vil alle løsningskurvene bevege seg ut fra origo, origo er en kilde.

Løsningskurven som svarer til $x_1(0) = 10$ og $x_2(0) = -8$ er tegnet inn med rødt i vedlegget, og løsningskurven som svarer til $x_1(0) = 10$ og $x_2(0) = -2$ er tegnet inn med grønt. Egenvektorene er tegnet inn med rød-brun farge.

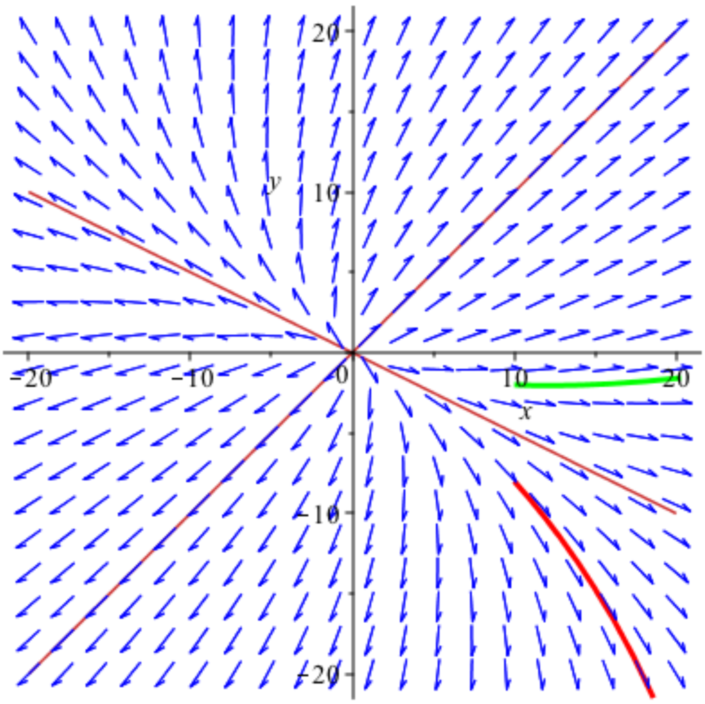
Kandidatnummer: ______________________

VEDLEGG MA0002 06.06.17 (to sider)

Dette arket skal leveres inn som del av eksamensbesvarelsen

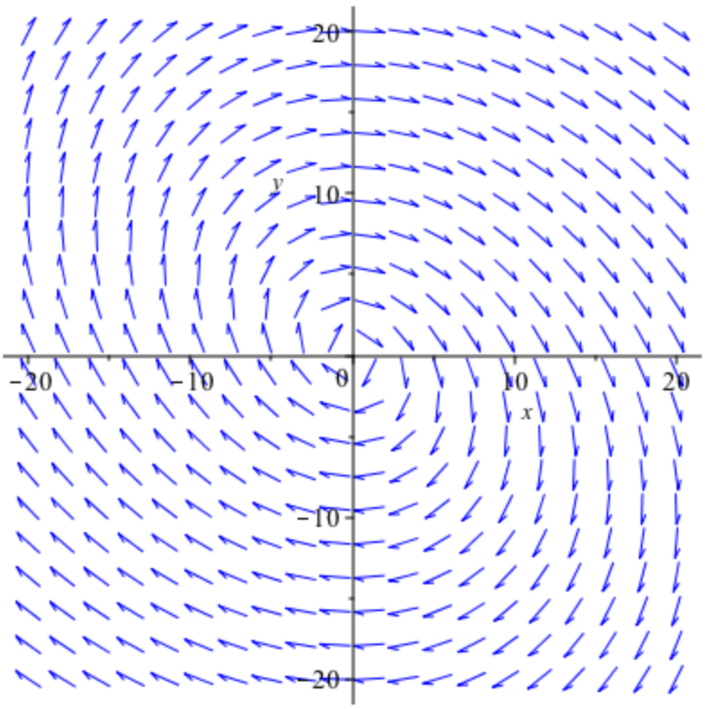


Retningsfelt 1

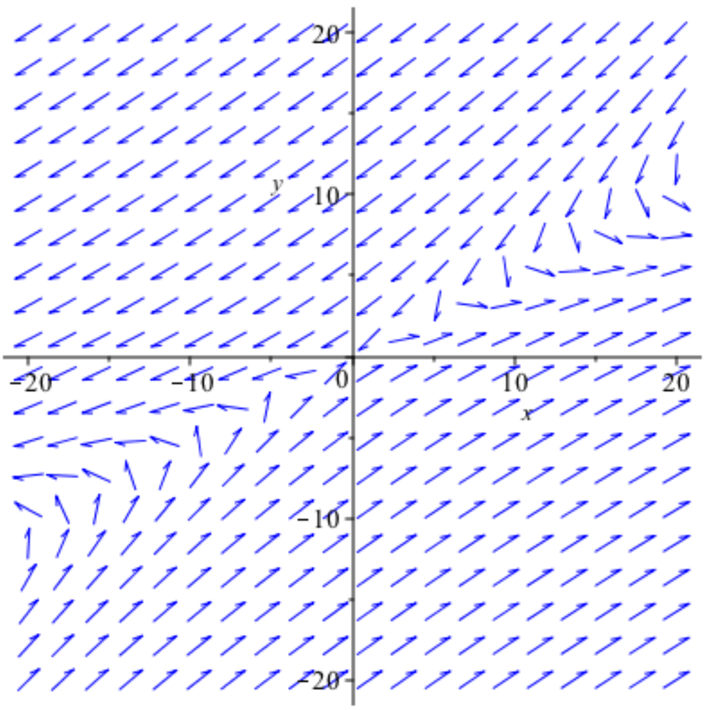


Retningsfelt 2

Kandidatnummer: ___________________________



Retningsfelt 3



Retningsfelt 4