Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA0002 Brukerkurs i matematikk B - LØSNING

Faglig kontakt under eksamen: Frode Rønning

Tlf: 95 21 81 38

Eksamensdato: 7. august 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 7

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☐	**farger** ☒
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1

a) Finn løsningen til differensiallikninga

$$\frac{dy}{dt} = 0,05(500 - y(t)) \tag{1}$$

når $y(0) = 150$. Vis alle utregningene som fører fram til løsningen.

Løsning: $\frac{dy}{dt} = 0,05(500 - y(t))$ kan skrives om til $\frac{dy}{500-y} = 0,05dt$ som ved integrasjon, og ved å bruke at $500-y > 0$, gir $\ln(500-y) = -0,05t+C_1$. Dette kan omskrives til $y(t) = 500 - Ce^{-0,05t}$. Ved å bruke $y(0) = 150$ bestemmes $C = 350$. Den fullstendige løsningen blir da $y(t) = 500 - 350e^{-0,05t}$.

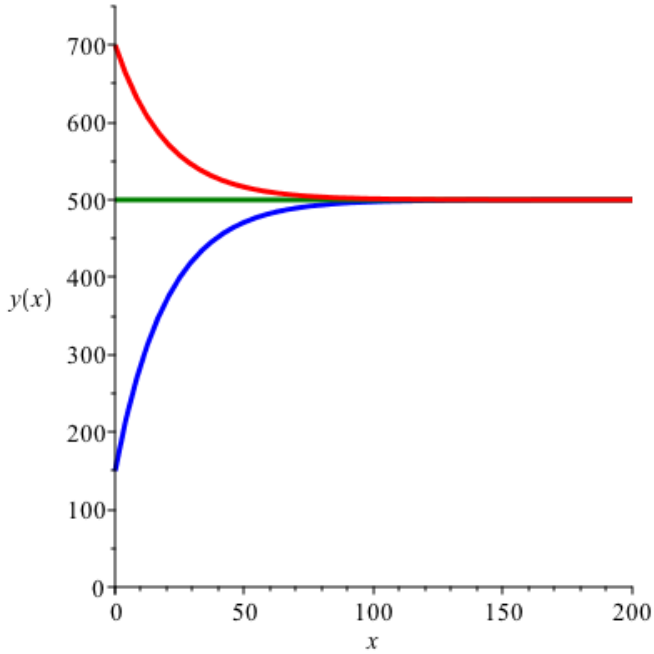
b) Finn eventuelle likevektsløsninger for (1), og avgjør om de er stabile eller ustabile. Finn så den løsningen av (1) som svarer til $y(0) = 700$. Skisser alle løsningene du har funnet (både i a) og b)) i et koordinatsystem, og forklar hva som skjer med de enkelte løsningene i det lange løp (dvs. når t går mot uendelig).

Løsning: Likevektsløsninger finnes der $\frac{dy}{dt} = 0$, altså for $y = 500$. Dette er en stabil likevektsløsning fordi ut fra likninga (1) ser en at når $y < 500$ er $\frac{dy}{dt} > 0$ og når når $y > 500$ er $\frac{dy}{dt} < 0$. Altså $y(t)$ er voksende opp mot 500 når $y < 500$ og avtakende ned mot 500 når $y > 500$.

Startverdien $y(0) = 700$ gir, innsatt i $y(t) = 500 - Ce^{-0,05t}$, $C = -200$. Så løsningen av (1) som svarer til $y(0) = 700$ blir $y(t) = 500 + 200e^{-0,05t}$. Løsningen som svarer til $y(0) = 150$ er tegnet som en blå kurve i figur 1, og løsningen som svarer til $y(0) = 700$ er tegnet som en rød kurve. I det lange løp vil begge løsningene nærme seg likevektsløsningen, $y = 500$ (grønn kurve).

c) Beskriv en situasjon som du mener kan modelleres ved hjelp av differensiallikninga (1) og startverdien $y(0) = 150$. Forklar hva de enkelte elementene i den matematiske modellen (altså differensiallikninga og startverdien) betyr i den situasjonen du beskriver.

Løsning: En mulig situasjon som kan modelleres ved (1) kan være en modell for begrenset vekst. La $y(t)$ betegne antall individer i en populasjon ved tiden t. Ved tiden $t = 0$ er det 150 individer. Dette svarer til $y(0) = 150$. $\frac{dy}{dt}$ betegner endringsraten for antall individer, og (1) uttrykker at denne endringsraten er proporsjonal (med proporsjonalitetskonstant 0,05) med differansen mellom 500 og antall individer til enhver tid, altså $500-y(t)$. Tallet 500 representerer en øvre bæreevne for populasjonen. Endringsraten blir liten når man nærmer seg denne øvre bæreevnen.



Figur 1

Oppgave 2

Et isfjell flyter i vann. Overflata av isfjellet har tilnærmet form som flata $z = f(x, y)$, der $f(x, y)$ er gitt nedenfor.

$$f(x, y) = 4xy - x^2 - y^4 + 25.$$

Verdien til z angir høyden over havflata til punktet på isfjellet med koordinater (x, y).

a) Finn de kritiske punktene til f, og avgjør hva slags type de er. Hvor høyt over havflata ligger de høyeste punktene på isfjellet?

Løsning: Partiell derivasjon gir $\partial f/\partial x = 4y - 2x$ og $\partial f/\partial y = 4x - 4y^3$. Kritiske punkter finnes ved å sette begge de partielle deriverte lik 0. Da får vi $\partial f/\partial x = 0$ for $x = 2y$ og $\partial f/\partial y = 0$ for $x = y^3$. Samlet gir dette at vi må ha $2y = y^3$, dvs. $y = 0$ eller $y^2 = 2$. Dette gir de tre kritiske punktene $(0, 0)$, $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

For å finne hva slags kritiske punkter det er snakk om kan man bruke andrederiverttesten. Utregning av andre ordens partielle deriverte gir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y^2$$

og

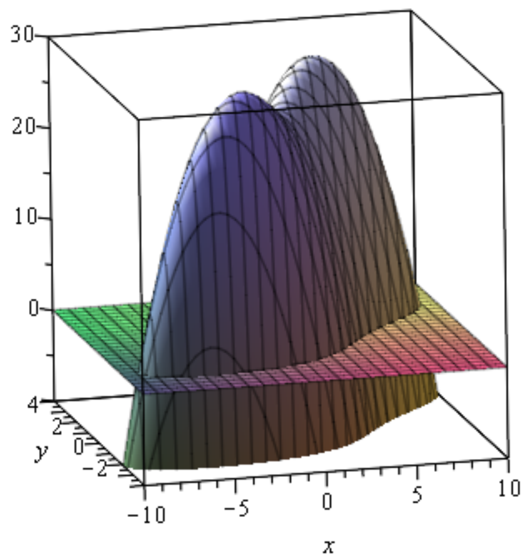
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4.$$

Sett

$$\Delta(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 24y^2 - 4.$$

For punktet $(0, 0)$ får vi $\Delta(0, 0) = -4 < 0$ som viser at $(0, 0)$ er et salpunkt. For punktet $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ får vi $\Delta(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 44 > 0$ og $\partial^2 f/\partial x \partial y = 4 > 0$ som viser at $(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ er et lokalt maksimumspunkt. Tilsvarende får vi også at $(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ er et lokalt maksimumspunkt. Funksjonsverdiene i de kritiske punktene er henholdsvis $f(0, 0) = 25$ og $f(2\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 29$. De høyeste punktene ligger altså 29 meter over havflata.

Figur 2 viser en del av isfjellet og en del av havflata rundt.



Figur 2

b) En pingvin står på isfjellet, i punktet der $(x, y) = (-3, 1)$. Hvor høyt over havnivået står pingvinen? Bestem en vektor $\vec{u}$ slik at den retningsderiverte til f i punktet $(x, y) = (-3, 1)$ og i retningen gitt ved $\vec{u}$ er null.

Løsning: $f(-3,1) = 3$, så pingvinen står 3 meter over havnivået. Gradienten er gitt ved

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y - 2x \\ 4x - 4y^3 \end{bmatrix}.$$

Innsatt $(x,y) = (-3,1)$ får vi $\nabla f(-3,1) = \begin{bmatrix} 10 \\ -16 \end{bmatrix}$.

Den retningsderiverte er gitt ved $D_{\vec{u}} f(-3,1) = \nabla f(-3,1) \cdot \vec{u} = 10u_1 - 16u_2$ der $\vec{u} =< u_1, u_2 >$ er en enhetsvektor. Vi får dermed at $D_{\vec{u}} f(-3,1) = 0$ når $10u_1 - 16u_2 = 0$, altså når $u_2 = \frac{5}{8}u_1$. Dette gir $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{89}} < 8, 5 >$.

c) Pingvinen skal skli ned i vannet fra punktet der han står. Han ønsker å skli i den retningen der isfjellet er brattest akkurat i det punktet der han står, altså i $(x,y) = (-3,1)$. Hvilken retning skal han velge?

Løsning: Gradienten til $f(x,y)$ i et punkt (x,y) har den egenskapen at den peker i den retningen der $f(x,y)$ vokser raskest, dvs. der flata har størst stigning. Pingvinen skal ned i vannet, så han vil dermed velge den retningen der $f(x,y)$ *avtar* raskest, dvs. i motsatt retning av gradienten. Pingvinen vender seg altså i retningen $< -10, 16 >$ når han skal skli ned.

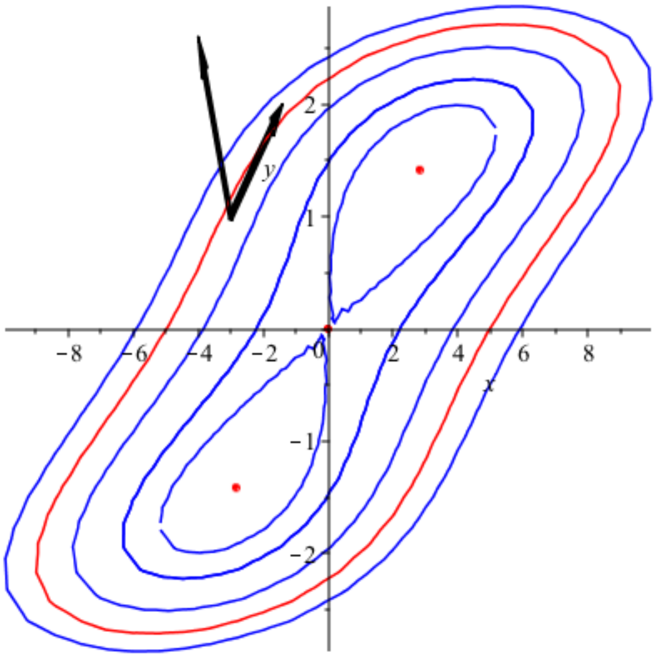
d) På vedlegget ser du nivåkurver (konturkurver) for $f(x,y) = c$ for ulike verdier av c. På vedlegget, som skal leveres inn som del av besvarelsen, skal du markere tydelig følgende objekter:

- Hvor vannkanten går
- De kritiske punktene
- Det punktet pingvinen står i
- Retningen til vektoren $\vec{u}$ (som du har funnet i b)) fra det punktet pingvinen står
- Retningen pingvinen velger å skli

Løsning:

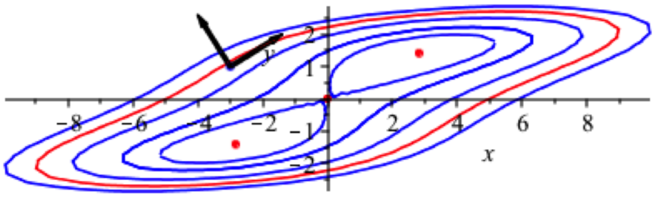
- Hvor vannkanten går: Vannkanten er den røde kurven i figur 3 ($c = 0$).
- De kritiske punktene: Disse er markert som røde prikker i figur 3.
- Det punktet pingvinen står i: Dette er det punktet som de to svarte vektorene går ut fra.
- Retningen til vektoren $\vec{u}$ (som du har funnet i b)) fra det punktet pingvinen står: Vektoren $\vec{u}$ er den som går på skrå opp til høyre i figur 3.

- Retningen pingvinen velger å skli: Denne retningen er gitt ved vektoren som går på skrå opp til venstre.



Figur 3

Merk: Vektoren $\vec{u}$, som gir retningsderivert lik 0, er tangent til nivåkurven i punktet (-3,1). Gradientvektoren står vinkelrett på nivåkurven. Dvs. at disse to vektorene står vinkelrett på hverandre. Det ser ikke slik ut på figuren, og det skyldes at det ikke er samme skala på de to aksene. Figur 4 viser situasjonen når det er valgt samme skala på aksene.



Figur 4

Oppgave 3

a) Finn den generelle løsningen til systemet av differensiallikninger som er satt opp nedenfor.

$$\frac{dx_1}{dt} = -3x_1(t) + 3x_2(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 6x_1(t) + 4x_2(t)$$

Løsning: Vi må først finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \boldsymbol{\lambda^2 - \lambda - 30} = (\lambda - \mathbf{6})(\lambda + \mathbf{5}) = \mathbf{0}$ for $\lambda_1 = 6$ og $\lambda_2 = -5$.

1. Egenvektorene som tilhører $\lambda_1 = 6$ finnes ved å løse

$$\begin{aligned} -9x_1 &\ +3x_2 &= 0 \\ 6x_1 &\ -2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

   som gir $x_2 = 3x_1$. Dvs. egenvektorene er gitt ved $t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

2. Egenvektorene som tilhører $\lambda_2 = -5$ finnes ved å løse

$$\begin{aligned} 2x_1 &\ +3x_2 &= 0 \\ 6x_1 &\ +9x_2 &= 0 \end{aligned}$$

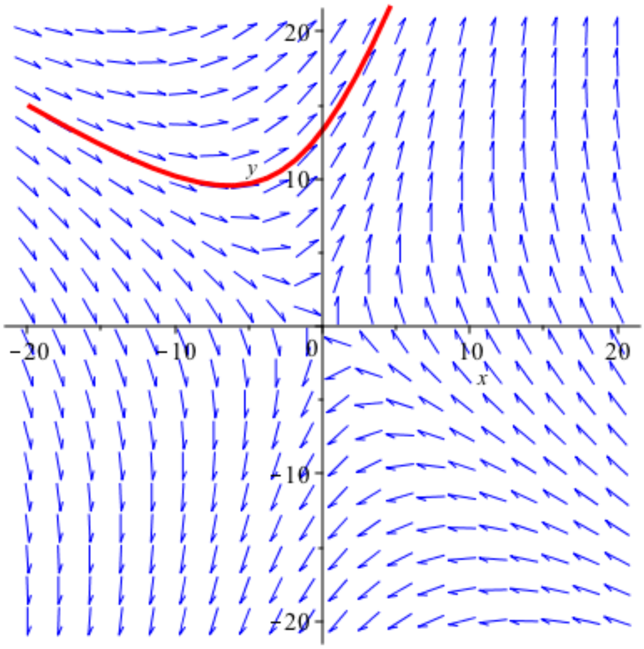
   som gir $x_2 = -\frac{2}{3}x_1$. Dvs. egenvektorene er gitt ved $t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $t \neq 0$.

Dette gir den generelle løsningen: $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = C_1e^{6t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2e^{-5t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

b) Finn den spesielle løsningen av systemet i a) under startbetingelsene $x_1(0) = -20$ og $x_2(0) = 15$. Skisser løsningskurven i et koordinatsystem.

Løsning: $x_1(0) = C_1 + 3C_2 = -20$ og $x_2(0) = 3C_1 - 2C_2 = 15$ gir verdiene $C_1 = \frac{5}{11}$ og $C_2 = -\frac{75}{11}$. Dvs. $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \frac{5}{11}e^{6t}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{75}{11}e^{-5t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Figur 5 viser løsningskurven (rød kurve) sammen med retningsfeltet til systemet.



Figur 5

c) La nå startbetingelsene være $x_1(0) = -20$ og $x_2(0) = k$, der k er et variabelt tall. Bestem en verdi av k som gjør at $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$ og $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$.

Løsning: For å oppnå at $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$ og $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$ kan vi bare ha bidrag fra den komponenten av løsningen som svarer til den negative egenverdien. Dvs. at C_1 må være lik 0. Med $C_1 = 0$ får vi fra likninga $C_1 + 3C_2 = -20$ at $C_2 = -\frac{20}{3}$. Likninga $3C_1 - 2C_2 = k$, med $C_1 = 0$ og $C_2 = -\frac{20}{3}$ gir da $k = \frac{40}{3}$.

Kandidatnummer: ___________________________

VEDLEGG MA0002 07.08.17

Dette arket skal leveres inn som del av eksamensbesvarelsen