NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B

Eksamen 28. mai 2016 — **Løsningsforslag**

Oppgave 1

a) Viser at $B = A^{-1}$ ved å vise at $AB = BA = I_3$. Nedenfor er matrisemultiplikasjonen AB vist (du må vise at BA gir det samme).

$$\begin{bmatrix} 4\cdot\frac{3}{4}-2 & 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+2\cdot\frac{1}{2} & 4\cdot\frac{3}{4}+2\cdot(-\frac{3}{2}) \\ 2\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{1}{2}+3(-1) & 2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)+3\cdot\frac{1}{2} & 2\cdot\frac{3}{4}+3+3\cdot(-\frac{3}{2}) \\ -2\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+1 & -2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2} & -2\cdot\frac{3}{4}+1+\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3.$$

b) Likningssystemet

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &= -6 \end{aligned}$$

på matriseform er gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Løser systemet ved å bruke resultatet fra (a):

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{3}{4}\cdot(-6) \\ \frac{1}{2}\cdot 4 - 6 \\ (-1)\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{3}{2}\cdot(-6) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 2

a) La $T(t)$ betegne brusens temperatur ved tiden t (minutter), og la k betegne proporsjonalitetsfaktoren. Vi setter da opp følgende differensiallikning med initialbetingelser:

$\frac{dT}{dt} = k(23 - T)$ der $T(0) = 7{,}4$ og $T(15) = 10$.

Løser differensiallikningen:

$$\frac{dT}{dt} = k(23 - T) \Leftrightarrow \frac{dT}{23 - T} = kdt \Leftrightarrow \frac{dT}{23 - T} = -kdt$$

$\Leftrightarrow \int \frac{dT}{23-T} = \int kdt \Leftrightarrow -\ln|23 - T| = kt + C$ (der C er en reell konstant)

$\Leftrightarrow \ln(23 - T) = -kt - C$ ($23 - T > 0$ fordi brustemperaturen alltid vil være lavere enn romtemperaturen)

$\Leftrightarrow e^{\ln(23-T)} = e^{-kt-C} \Leftrightarrow 23 - T = C_1 e^{-kt} \; der \; C_1 = e^{-C}$

$\Leftrightarrow T(t) = 23 - C_1 e^{-kt}$.

Bestemmer konstantene C_1 og k ut fra initialbetingelsene:

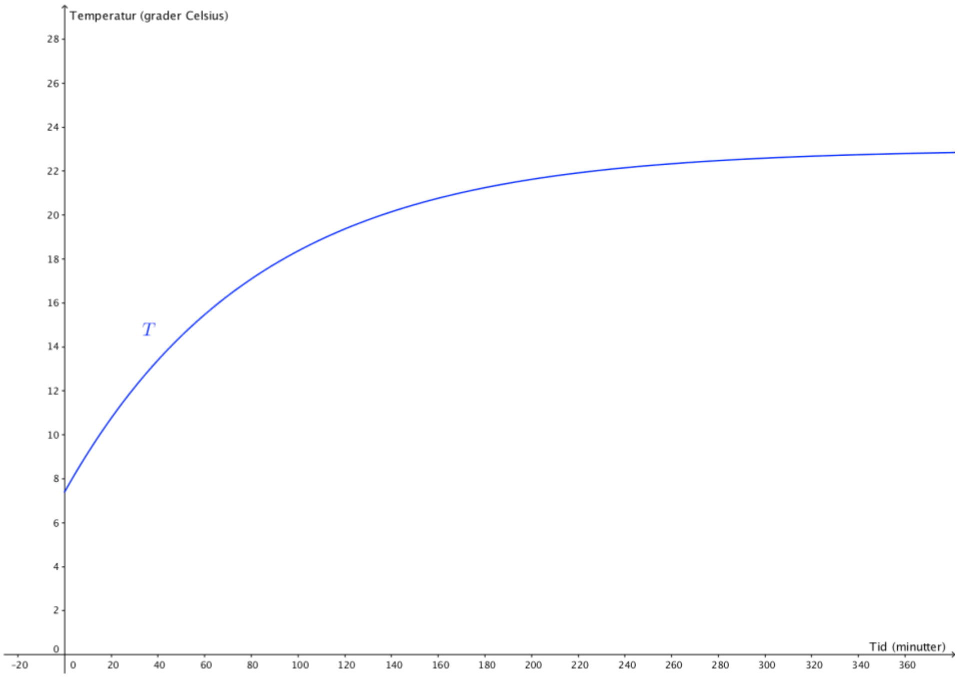
(1) $T(0) = 7{,}4 \Leftrightarrow C_1 = -15{,}6$. Dvs. $T(t) = -15{,}6e^{-kt} + 23$.

(2) $T(15) = 10 \Leftrightarrow -15{,}6e^{-15k} + 23 = 10 \Leftrightarrow e^{-15k} = \frac{65}{78} \Leftrightarrow \ln e^{-15k} = \ln\frac{65}{78}$

$\Leftrightarrow k \approx 0{,}0122$.

Dette gir følgende løsning av differensiallikningen:

$$T(t) = -15{,}6e^{-0.0122t} + 23.$$



b) $\frac{dT}{dt} = 0{,}0122(23 - T)$.

$\frac{dT}{dt}(15) = 0{,}0122\big(23 - T(15)\big) = 0{,}0122(23 - 10) = 0{,}158.$

Det vil si at endringsraten (temperaturøkningen per minutt) i tidspunktet 15 minutter etter at brusen ble tatt ut av kjøleskapet er lik 0,158 grader Celsius per minutt (som vi kan skrive 0,158 °C/min).

(Det går også an å finne løsningen ved å derivere $T(t)$ og sette inn for $t = 15$).

c) $T(t) = 12 \Leftrightarrow -15{,}6e^{-0{,}0122t} + 23 = 12 \Leftrightarrow t \approx 28{,}6$. Det vil si det vil ta 28,6 minutter (28 min 36 sek) før temperaturen i brusen er lik 12 °C.

Oppgave 3

a) $L = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

b) $N(1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720 \\ 50 \\ 33 \end{bmatrix}$

$$N(2) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 720 \\ 50 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 696 \\ 360 \\ 17 \end{bmatrix}$$

(desimaltall avrundes til nærmeste heltall).

Alternativt: $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 \\ 360 \\ 17 \end{bmatrix}$.

c) Finner egenverdiene til L:

$\det(L - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0.$

Verifiserer at $\lambda_1 = 2$ er rot i det karakteristiske polynomet $(-\lambda^3 + 3\lambda + 2)$ ved å evaluere for $\lambda = 2$:
$-2^3 + 6 + 2 = 0 \rightarrow$ OK.

Dette betyr at det karakteristiske polynomet er delelig med $(\lambda - 2)$. Vi foretar polynomdivisjon for å kunne skrive $-\lambda^3 + 3\lambda + 2$ som et produkt av en lineær og en kvadratisk faktor:

$$\begin{array}{l} (-\lambda^3 + 3\lambda + 2) : (\lambda - 2) = -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ \underline{-(-\lambda^3 + 2\lambda^2)} \\ \qquad -2\lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ \underline{\qquad -(-2\lambda^2 + 4\lambda)} \\ \qquad\qquad -\lambda + 2 \\ \underline{\qquad\qquad -\lambda + 2} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Det vil si at $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$.

Vi finner røttene til andregradspolynomet $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ ved å se at det er lik $(\lambda + 1)^2$ $\rightarrow$ Dette gir $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. (Kan også finne røttene ved å bruke ABC-formelen).

Vi har altså at $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1 < \lambda_1$. Dette betyr at $\lambda_1 = 2$ er en *strengt dominerende* egenverdi til Lesliematrisen, som medfører at egenverdien λ_1 er vekstparameteren til populasjonen.

Finner egenvektoren tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (L - \lambda_1 I_3) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Løser dette likningssystemet ved å foreta elementære radoperasjoner på matrisen $L - \lambda_1 I_3$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 6 & 12 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R1 \\ R2 \\ R3 \end{matrix} \qquad \text{R1} \rightarrow -\tfrac{1}{2}\,\text{R1}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R4 \\ R2 \\ R3 \end{matrix} \qquad \text{R2} \rightarrow R2 - \tfrac{1}{2}\,\text{R4}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R4 \\ R5 \\ R3 \end{matrix} \qquad \text{R5} \rightarrow -2\,\text{R5}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R4 \\ R6 \\ R3 \end{matrix} \qquad \text{R3} \rightarrow R3 - \tfrac{1}{3}\,\text{R6}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R4 \\ R6 \\ R7 \end{matrix} \qquad \text{R4} \rightarrow R4 + 3R6$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad .$$

Den siste matrisen er på redusert trappeform, og løsningen av systemet er dermed gitt ved:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ som betyr at } \begin{matrix} u_1 = 24u_3 \\ u_2 = 6u_3 \\ 0u_3 = 0 \end{matrix}$$

Vi setter $u_3 = t$ og får at

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Vi velger $t = 1$ og får egenvektoren $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ (tilhørende egenverdien $\lambda_1 = 2$).

d) Denne populasjonen har en vekstparameter lik 2 (som er gitt ved den dominante egenverdien). Dette betyr at—for store t–verdier—vil antall individer i hvert årskull dobles for hvert år. Antall individer vil derfor vokse mot uendelig i det lange løp. Egenvektoren tilhørende den dominerende egenverdien medfører at populasjonen i det lange løp vil få en stabil aldersfordeling på 24:6:1. Dette svarer til en (cirka) fordeling på 78 % 0-åringer, 19 % 1-åringer og 3 % 2-åringer.

Oppgave 4

$f(x, y) = 2x - x^2 - y^2 + 3$ er definert på det lukkede og begrensede området

$$D = \{(x, y): -1 \leq x \leq 2 \text{ og} -1 \leq x \leq 2\}.$$

a) Finn globale maksimums- og minimumspunkter til *f* på *D*.

Finner eventuelle kritiske punkt:

$$\boldsymbol{\nabla} f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 - 2x \\ -2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (x, y) = (1{,}0) \text{ som er et punkt i } D.$$

Vi kan karakterisere det kritiske punktet ved hjelp av andreordens partiellderivert-testen (selv om dette ikke er nødvendig ut fra oppgaven):

Hessematrisen *H* for *f* i (1,0) er lik

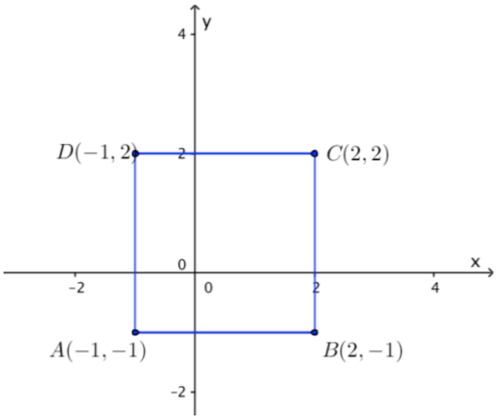
$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1{,}0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1{,}0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1{,}0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1{,}0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\det H = 4 > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1{,}0) < 0 \Longrightarrow$ det kritiske punktet er et *lokalt maksimumspunkt*.

Ekstremalverdi-teoremet i $\mathbb{R}^2$ (kap. 10.6) sier at en kontinuerlig funksjon på et lukket og begrenset området *D* har både et globalt minimums- og et globalt maksimumspunkt på *D*.

Området *D* i xy-planet er vist i figuren nedenfor. Vi leter etter kandidater til ekstremal-punkter på randen til *D*:

Vi benytter metoden med å finne et uttrykk for den ene variabelen ved hjelp av den andre, og sette inn i $f(x,y)$ som da blir en funksjon av en variabel. Dette må vi gjøre for de fire sidekantene på *D*, og deretter vurdere hjørnene på det kvadratiske området.



Linjestykket *AB*: Her er $y=-1$, som gir $f(x,-1)=2x-x^2+2=g(x)$.

$g'(x)=2-2x$. Løser $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Dvs. kandidat til globalt ekstremalpunkt er $(1,-1)$.

Linjestykket *DC*: Her er $y=2$, som gir $f(x,2)=2x-x^2-1=g(x)$

$g'(x)=2-2x$. Løser $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Dvs. kandidat til globalt ekstremalpunkt er $(1,2)$.

Linjestykket *BC*: Her er $x=2$, som gir $f(2,y)=-y^2+3=g(y)$

$g'(y)=-2y$. Løser $g'(y)=0 \Leftrightarrow y=0$. Dvs. kandidat til globalt ekstremalpunkt er $(2,0)$.

Linjestykket *AD*: Her er $x=-1$, som gir $f(-1,y)=-y^2=g(y)$

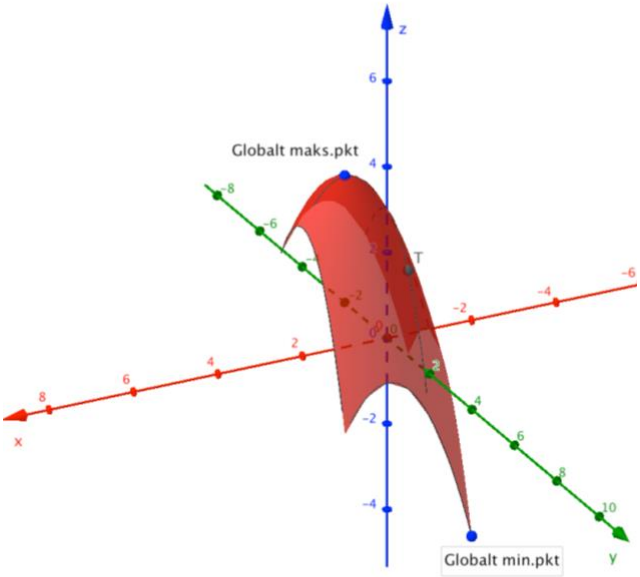
$g'(y)=-2y$. Løser $g'(y)=0 \Leftrightarrow y=0$. Dvs. kandidat til globalt ekstremalpunkt er $(-1,0)$.

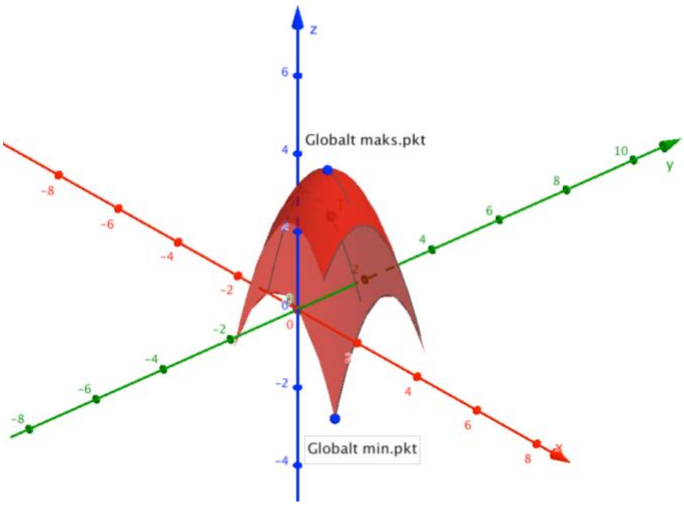
Hjørnene:

$f(-1,-1)=-1$
$f(2,-1)=2$
$f(2,2)=-1$
$f(-1,2)=-4$

(x,y)	$(-1,-1)$	$(2,-1)$	$(2,2)$	$(-1,2)$	$(1,0)$	$(1,-1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(-1,0)$
$f(x,y)$	-1	2	-1	-4	4	3	0	3	0
				Globalt min.pkt	Globalt maks.pkt				

De globale ekstremalpunktene er vist på datagrafikken nedenfor (fra ulike perspektiv).





b) Hvilke egenskaper er det som sikrer at $f(x, y)$ er deriverbar i $(0,1)$?

$f(x, y)$ er deriverbar i (0,1) fordi:

→ Funksjonen f er definert på en åpen disk med sentrum i (0,1).
→ De partiellderiverte er gitt ved $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. Disse funksjonene er polynomer og derfor kontinuerlige for alle $(x, y) \in D$ (og da spesielt for en åpen disk med sentrum i (0,1) som er kravet).

c) Den lineære approksimasjonen til f i punktet (0,1) er gitt ved:

$$L(x, y) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x - 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y - 1) = 2 + 2x - 2(y - 1)$$

$$\Leftrightarrow \; L(x, y) = 2x - 2y + 4.$$

$L(0.01,0.95) = 2{,}12$
$f(0.01,0.95) = 2{,}1174$ (dvs. den lineære approksimasjonen i (0,1) er en god tilnærming til f i omegn om dette punktet).