Fasit til utsatt eksamen MA0002 – 18.08.2016

Oppgave 1

a) $\frac{3}{2} ln|x^2-1| - 2ln|x| + C$

b) $\arctan(x+2) + C$

Oppgave 2

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 6200 \\ 950 \end{bmatrix}$

c) Egenverdi $\lambda_1 = 3$ med egenvektor $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

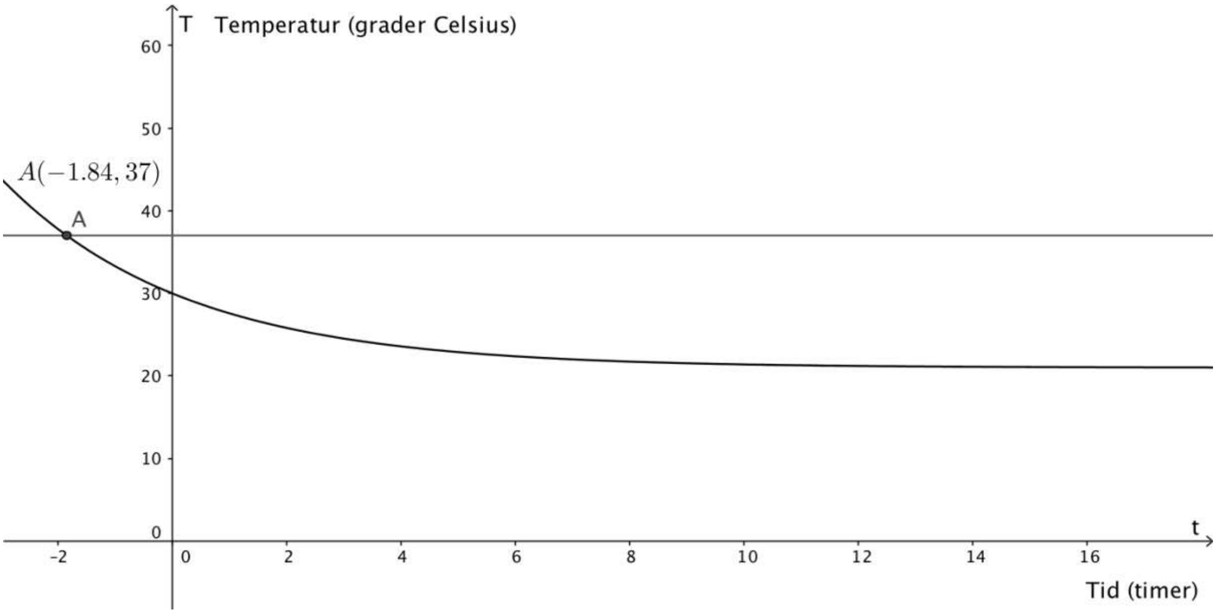
Egenverdi $\lambda_2 = -1$ med egenvektor $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $\lambda_1 = 3$ er dominant egenverdi (dvs. vekstparameter lik 3) → for store *t*-verdier vil populasjonen vokse mot uendelig slik: Populasjonen vil bli tre ganger så stor for hvert år, og forholdet mellom 0-åringer og 1-åringer vil være 6:1. Dette betyr at det (for store t-verdier) vil være 86 % 0-åringer og 14 % 1-åringer.

Oppgave 3

a) $T(t) = 9e^{-0,312t} + 21$,

der $T(t)$ er temperaturen i tidspunktet *t* timer etter kl. 12:40.



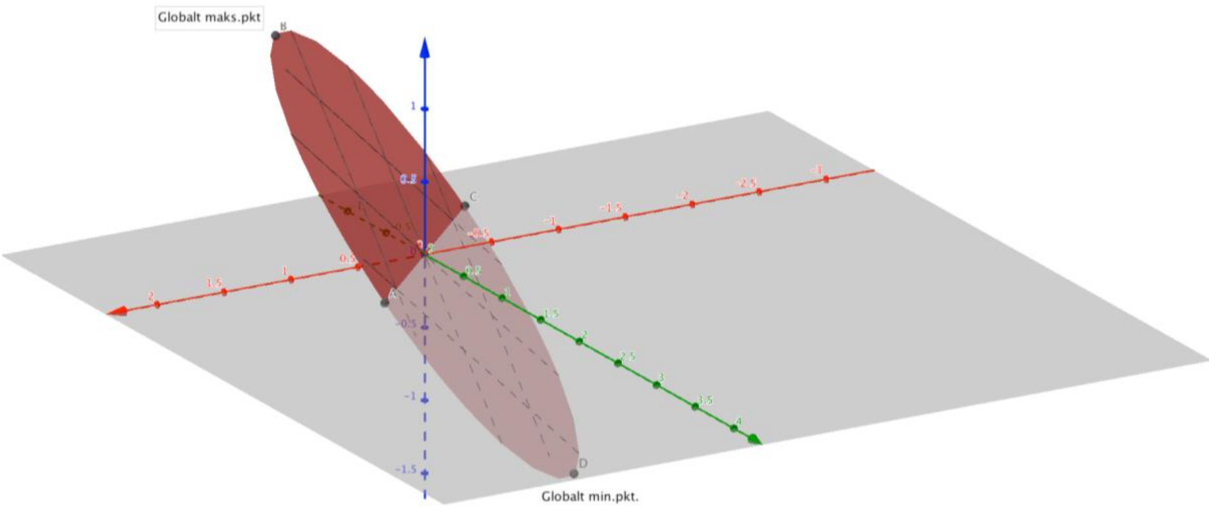
b) Døden inntraff ca. 1,84 timer (1 time 50 min) før kl. 12:40, dvs. kl. 10:50.

Oppgave 4

a) $\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \nabla f \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ for alle (x, y), derfor ingen kritiske punkter.

Globalt maksimalpunkt: $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$

Globalt minimalpunkt: $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$



b) $\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $|\bar{u}| = \sqrt{5}$ gir at $D_{\bar{u}}f_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. (For en gitt $\bar{u}$ får vi samme retningsderivert for alle punkter (x, y) i def.området fordi grafen er et plan).

Øker mest i retning av gradienten $\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (uavhengig av punkt i def.området fordi grafen er et plan).

Oppgave 5

$\bar{x}(t) = C_1 e^{7t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$ (generell løsning)

$\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 9 \\ -13 \end{bmatrix} \iff \bar{x}(t) = -3e^{7t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2e^{-4t} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Eksamen 2016 H

Oppg. 4 a)

$$f(x,y) = x - y \qquad D_f = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Finn globale max- og min-pkt for f på D_f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

$$\nabla f(x,y) \neq \bar{0} \text{ for alle } (x,y).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -1$$

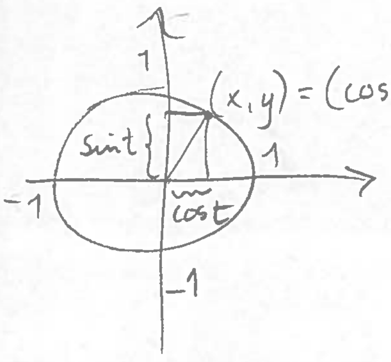
⊃: ingen kritiske punkter i det indre av def.m.

f har ingen singulære punkter.

<u>Randa</u>:

Parametriserer sirkelen:

$$x = \cos t \qquad t \in [0, 2\pi]$$



$$y = \sin t$$

$\dot{g}(t) = \cos t - \sin t$

$g'(t) = -\sin t - \cos t$

$g'(t) = 0 \iff -\sin t - \cos t = 0$

$\Updownarrow$

$\sin t + \cos t = 0$

$\Updownarrow$ div. med $\cos t$

$v = \frac{\text{grader}}{180}\pi$

$\tan t + 1 = 0$

$\Updownarrow$

$\tan t = -1$

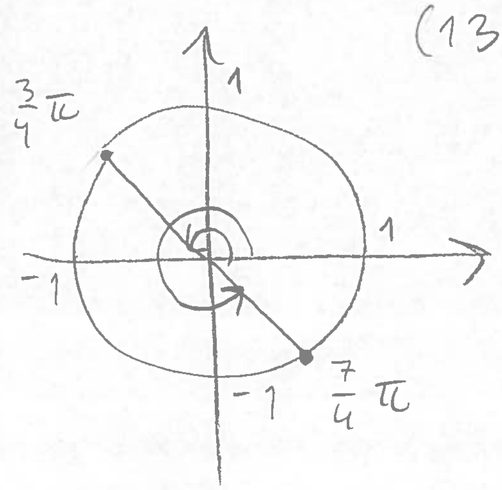
$\Updownarrow$

$t = \frac{3}{4}\pi + k\pi$

): $t \in [0, 2\pi]$ vil vi ha

$t = \frac{3}{4}\pi$ og $t = \frac{7}{4}\pi$ ($k=0$ og $k=1$)

(135°) (315°)



): $t = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow x = \cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$t = \frac{7}{4}\pi \Rightarrow x = \cos\frac{7}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \sin\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

): To pkt:

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{-\sqrt{2}}$ → Globalt min

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\sqrt{2}}$ → Globalt max.

b) Beregn den retningsderiverte $D_{\bar{u}}f$ i pkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i retningen av $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$$

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad |\bar{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \underline{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$D_{\bar{u}} f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} (1 - 2)$$

$$= \underline{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

Får samme retn. derivert for alle $(x,y) \in D_f$ fordi grafen er et <u>plan</u>.

Øker mest i retning av gradienten

$\nabla f = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (uavh. av (x,y) fordi grafen er et plan).