



Norges  
teknisk–naturvitenskapelige  
universitet  
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs  
i matematikk B  
Vår 2014

**Løsningsforslag.  
Eksamen 26. mai**

**Løsning: Oppgave 1 a)**

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + y - 2 = (y + 2)(y - 1) =: g(y),$$

så likevektsløsningene er de to konstante funksjonene

$$\hat{y}_1 = -2, \quad \text{og} \quad \hat{y}_2 = 1.$$

Nå er  $g'(y) = 2y + 1$  så løsningen  $\hat{y}_1$  er **stabil** fordi

$$g'(\hat{y}_1) = g'(-2) = -3 < 0$$

og  $\hat{y}_2$  er **ustabil** fordi

$$g'(\hat{y}_2) = g'(1) = 3 > 0.$$

Stabiliteten til likevektsløsningene kan også avgjøres ved å drøfte grafen til  $g$ .

**Løsning: Oppgave 1 b)**

Ligningen er separabel:

$$\frac{dy}{y^2 + y - 2} = dx.$$

Delbrøkkspaltning:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2 + y - 2} &= \frac{1}{(y + 2)(y - 1)} = \frac{A}{y + 2} + \frac{B}{y - 1} \\ &= \frac{A(y - 1) + B(y + 2)}{(y + 2)(y - 1)} \\ &\iff \\ 1 &= A(y - 1) + B(y + 2) \\ &= (A + B)y + 2B - A \\ &\iff \\ A + B &= 0 \quad \text{og} \quad 1 = 2B - A \\ &\iff \\ A &= -\frac{1}{3} \quad \text{og} \quad B = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Altså er

$$3 dx = \left( \frac{1}{y - 1} - \frac{1}{y + 2} \right) dy$$

som kan integreres til

$$\begin{aligned}
 3x + C &= \ln|y - 1| - \ln|y + 2| \\
 &= \ln(1 - y) - \ln(y + 2), \quad \text{fordi } -2 < y < 1 \\
 &= \ln \frac{1 - y}{y + 2} \\
 &\iff \\
 Ke^{3x} = e^{3x+C} &= \frac{1 - y}{y + 2}.
 \end{aligned}$$

Initialbetingelsen gir  $K = \frac{1 - (-1)}{-1 + 2} = 2$ . Vi løser nå for  $y$  og finner at

$$y(x) = \frac{1 - 4e^{3x}}{1 + 2e^{3x}}.$$

### Løsning: Oppgave 1 c)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4e^{3x}}{1 + 2e^{3x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-3x} - 4}{e^{-3x} + 2} \\
 &= \frac{-4}{2} = -2. \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 4e^{3x}}{1 + 2e^{3x}} \\
 &= \frac{1}{1} = 1.
 \end{aligned}$$

Alle grafene i figur 1 oppfyller initialbetingelsen  $y(0) = -1$ , men bare **graf (d)** ser ut til å tilfredsstille grenseverdiene beregnet ovenfor.

Denne oppgaven kan også løses uten å finne en eksplisitt formel for  $y(x)$ : Likevektsløsningene og deres stabilitet, som vi fant i oppgave 1a) forteller at alle løsninger til differensialligningen som har en verdi i intervallet  $(-2, 1)$  – i dette tilfellet  $y(0) = -1 \in (-2, 1)$  – vil bevege seg **bort** fra  $y = 1$  og **mot**  $y = -2$ . Denne innsikten gir oss både grenseverdiene og at figur 1(d) er eneste kandidat til å være grafen til  $y$ .

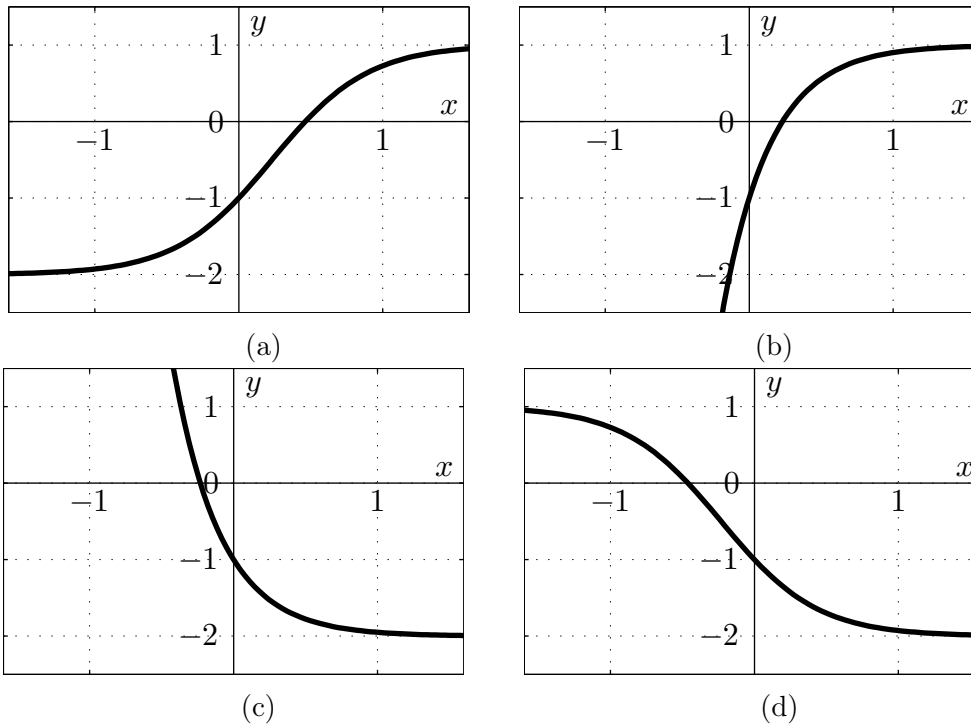
### Løsning: Oppgave 2

La  $x$  være antall kronestykker og la  $y$  være antall fem-kroner i stabelen. Stabelen veier

$$4.35x + 7.85y = 601 \tag{1}$$

gram, og er

$$1.7x + 2y = 197.5 \tag{2}$$



Figur 1: Finn riktig graf i oppgave 1c)

mm høy. Dette er et lineært ligningssett som kan løses med f.eks. radreduksjon (Gausseliminasjon): 1.7 ganger (1) minus 4.35 ganger (2) gir

$$\begin{aligned}
 \cancel{1.7} - \cancel{4.35}x + 1.7 \cdot 7.85y - \cancel{4.35} - \cancel{1.7}x - 4.35 \cdot 2y &= 1.7 \cdot 601 - 4.35 \cdot 197.5 \\
 &\iff \\
 (1.7 \cdot 7.85 - 4.35 \cdot 2)y &= 1.7 \cdot 601 - 4.35 \cdot 197.5.
 \end{aligned}$$

Det er altså

$$y = \frac{1.7 \cdot 601 - 4.35 \cdot 197.5}{1.7 \cdot 7.85 - 4.35 \cdot 2} = 35$$

fem-kroner. Ligning (2) gir da

$$x = \frac{197.5 - 2y}{1.7} = \frac{197.5 - 2 \cdot 35}{1.7} = 75$$

kronestykker og stabelen er verdt

$$1 \cdot x + 5y = 75 + 175 = 250$$

kroner.

**Løsning: Oppgave 3 a)**

Eigenverdiene til  $A$  er løsningene av ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(-2 - \lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \\ &= (\lambda + 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Dvs

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 2.$$

Eigenvektoren  $\mathbf{u}_1$  er en løsning til ligningen

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda_1 I)\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

så alle vektorer med komponenter som tilfredsstiller  $x - y = 0$  er en egenvektor til  $A$ . La derfor

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi finner  $\mathbf{u}_2$  på samme måte:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda_2 I)\mathbf{x} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \\ x &= 4y \end{aligned}$$

Med f.eks.  $y = 1$  har vi at

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor til  $A$  tilhørende  $\lambda_2 = 2$ .

**Løsning: Oppgave 3 b)**

Vi har nå at

$$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definisjonen av matriseprodukt gir

$$\Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

og det er åpenbart at eksponenten til elementene på diagonalen vil øke med én for hver ny multiplikasjon med  $\Lambda$ . De andre elementene vil alltid være null. Altså er

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

for alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Formelen for inversen til en  $2 \times 2$ -matrise gir at

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

så

$$\begin{aligned} U\Lambda U^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} U^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -9 & 12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### Løsning: Oppgave 3 c)

La  $n \in \mathbb{N}$  og la  $B$  og  $C$  være kvadratiske matriser der  $B$  er invertierbar. Da er

$$\begin{aligned} (BCB^{-1})^n &= BCB^{-1}BCB^{-1}B \dots C B^{-1} \\ &= BCIC I \dots C B^{-1} \\ &= BCC \dots C B^{-1} \\ &= BC^n B^{-1}. \end{aligned}$$

Fra oppgave 3b) ser vi at  $A = U\Lambda U^{-1}$ . Dette, og det over, medfører at vi kan beregne

$A^6$  som

$$\begin{aligned}
 A^6 &= (U\Lambda U^{-1})^6 \\
 &= U\Lambda^6 U^{-1} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^6 & 0 \\ 0 & \lambda_2^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1^6 & 4\lambda_2^6 \\ \lambda_1^6 & \lambda_2^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \lambda_1^6 - 4\lambda_2^6 & -4\lambda_1^6 + 4\lambda_2^6 \\ \lambda_1^6 - \lambda_2^6 & -4\lambda_1^6 + \lambda_2^6 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - 4 \cdot 2^6 & -4 \cdot 1 + 4 \cdot 2^6 \\ 1^6 - 2^6 & -4 \cdot 1 + 2^6 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -255 & 252 \\ -63 & 60 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 85 & -84 \\ 21 & -20 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

At  $A = U\Lambda U^{-1}$  er ingen tilfeldighet:

$$\begin{aligned}
 AU &= A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \\
 &= (A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2) \\
 &= (\lambda_1\mathbf{u}_1, \lambda_2\mathbf{u}_2) \\
 &= (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 &= U\Lambda.
 \end{aligned}$$

### Løsning: Oppgave 4 a)

Du løper  $x$  km langs elvebredden, og ved Pythagoras er lengden på svømmeturen

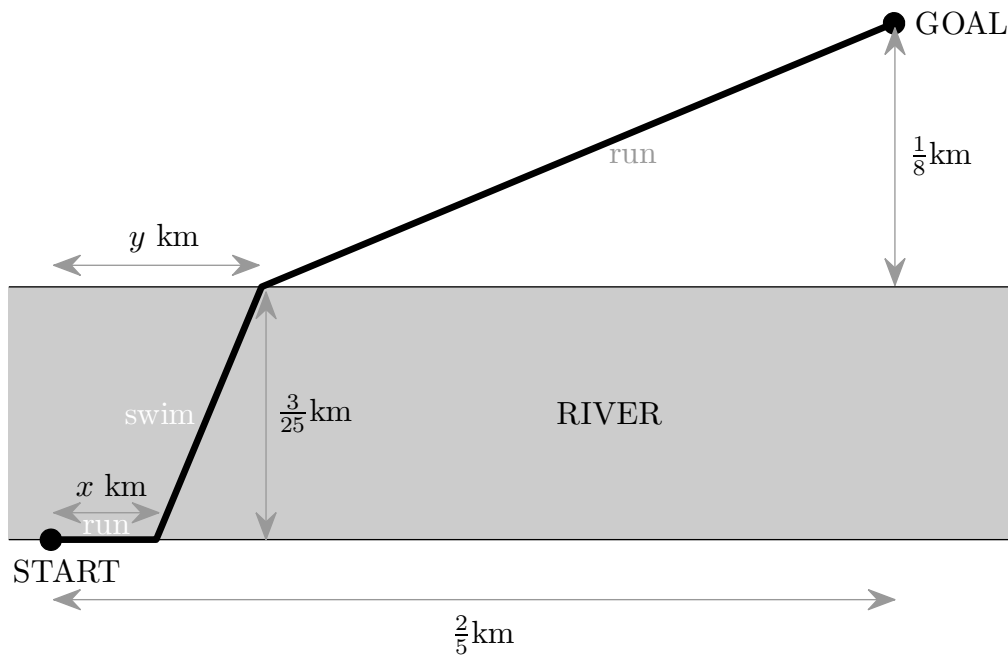
$$\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}$$

km lang og avstanden fra der du kommer i land til mål er

$$\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}$$

km. Etersom tid er avstand/hastighet, blir da tiden  $T$  det tar å komme seg fra start til mål

$$T(x, y) = \frac{x}{13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}}{5} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}}{12}$$



Figur 2: Løp, svøm og løp i oppgave 4

timer. Gradienten er gitt ved  $\nabla T(x, y) = \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right)$  der

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{13} + \frac{1}{5} \frac{2(y-x)(-1)}{2\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} \end{aligned}$$

og

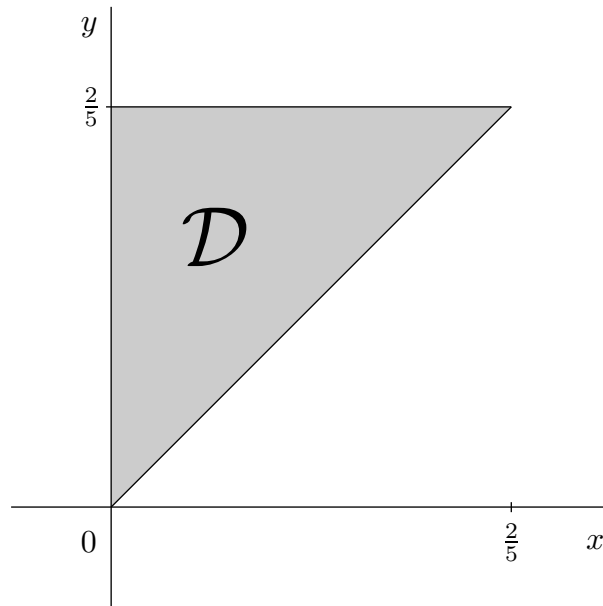
$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{5} \frac{2(y-x)}{2\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} + \frac{1}{12} \frac{2\left(\frac{2}{5} - y\right)(-1)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}} \\ &= \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} - \frac{\frac{2}{5} - y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}}. \end{aligned}$$

**Løsning: Oppgave 4 b)**

Mengden  $\mathcal{D}$  er trekanten vist i figur 3. Området er avgrenset av linjene  $y = x$ ,  $y = 2/5$  og  $x = 0$ .

Minimum til  $T$  på randlinjen  $x = 0$ , er oppgitt i oppgaveteksten. Det gjenstår å sjekke de andre randlinjene til domenet. Vi ser først på diagonalen  $y = x$  i trekanten og vi lar

$$g_1(x) := T(x, x) = \frac{x}{13} + \frac{3}{25 \cdot 5} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}}{12}$$

Figur 3: Mengden  $\mathcal{D}$  i planet.

for  $0 \leq x \leq 2/5$ .

Kandidater for minimum på randen er endepunktet til diagonalen,

$$\hat{\mathbf{x}}_1 := \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

(Det andre endepunktet  $(0,0)^T$  er ikke interessant ettersom det ligger på linjen



$x = 0$ ) og eventuelle kritiske punkter til  $g_1$ :

$$\begin{aligned}
 0 = g_1'(x) &= \frac{1}{13} - \frac{\frac{2}{5} - x}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}} \\
 &\iff \\
 \frac{1}{13} &= \frac{\frac{2}{5} - x}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}} \\
 &\iff \\
 \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2} &= \frac{13}{12} \left(\frac{2}{5} - x\right) \\
 &\iff \\
 \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \frac{13^2}{12^2} \left(\frac{2}{5} - x\right)^2, \quad \text{fordi } \frac{2}{5} - x \geq 0 \\
 &\iff \\
 \left(\frac{13^2}{12^2} - 1\right) \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \\
 &\iff \\
 \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{1}{8}\right)^2 \frac{1}{\frac{13^2}{12^2} - 1} \\
 &= \frac{1}{8^2} \frac{12^2}{13^2 - 12^2} \\
 &= \frac{9}{100}.
 \end{aligned}$$

Altså er  $\frac{2}{5} - x = \frac{3}{10}$  som gir  $x = \frac{2}{5} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$ . Dette gir det andre kandidatpunktet

$$\hat{\mathbf{x}}_2 := \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nå på linjen  $y = 2/5$  og lar

$$g_2(x) := T(x, 2/5) = \frac{x}{13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}}{5} + \frac{1}{8 \cdot 12}$$

for  $0 \leq x \leq 2/5$ . Denne funksjonen har et kritisk punkt gitt ved

$$\begin{aligned}
 0 = g_2'(x) &= \frac{1}{13} - \frac{\frac{2}{5} - x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}} \\
 &\iff \\
 \frac{1}{13} &= \frac{\frac{2}{5} - x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2}} \\
 &\iff \\
 \sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2} &= \frac{13}{5} \left(\frac{2}{5} - x\right) \\
 &\iff \\
 \left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \frac{13^2}{5^2} \left(\frac{2}{5} - x\right)^2, \quad \text{fordi } \frac{2}{5} - x \geq 0 \\
 &\iff \\
 \left(\frac{13^2}{5^2} - 1\right) \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{3}{25}\right)^2 \\
 &\iff \\
 \left(\frac{2}{5} - x\right)^2 &= \left(\frac{3}{25}\right)^2 \frac{1}{\frac{13^2}{5^2} - 1} \\
 &= \frac{3^2}{25^2} \frac{5^2}{13^2 - 5^2} \\
 &= \frac{1}{400}.
 \end{aligned}$$

Dvs.  $\frac{2}{5} - x = \frac{1}{20}$ , og  $x = \frac{2}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$ . Dette gir den tredje og siste kandidaten for minimum på randen:

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = \begin{pmatrix} 7/20 \\ 2/5 \end{pmatrix}.$$

En sammenligning av kandidatene forteller at

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}}_1 &= \begin{pmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}, & T(\hat{\mathbf{x}}_1) &= \frac{2}{5 \cdot 13} + \frac{3}{5 \cdot 25} + \frac{1}{12 \cdot 8} \\
 & & &\approx 0.06519 \\
 \hat{\mathbf{x}}_2 &= \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \end{pmatrix}, & T(\hat{\mathbf{x}}_2) &= \frac{1}{10 \cdot 13} + \frac{3}{5 \cdot 25} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}}{12} \\
 & & &\approx 0.05878 \\
 \hat{\mathbf{x}}_3 &= \begin{pmatrix} 7/20 \\ 2/5 \end{pmatrix}, & T(\hat{\mathbf{x}}_3) &= \frac{7}{20 \cdot 13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2}}{5} + \frac{1}{8 \cdot 12} \\
 & & &\approx 0.06334
 \end{aligned}$$

Ingen av disse verdiene for  $T$  er mindre enn 0.05697, så **nei**, minimum for  $T$  på randen av  $\mathcal{D}$  er 0.05697.

### Løsning: Oppgave 4 c)

Funksjonen  $T$  er kontinuerlig på sitt lukkede og begrensede domene  $\mathcal{D}$ , så vi vet dermed at det finnes et absolutt minimum. Vi ser også at gradienten eksisterer for alle  $(x, y)^T \in \mathcal{D}$  som betyr at vi vil finne dette minimumet enten i de kritiske punktene til  $T$  eller på randen til  $\mathcal{D}$ .

Vi finner de kritiske punktene til  $T$ . Dvs der  $\nabla T = \mathbf{0}$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial x} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}}. \end{aligned}$$

Denne ligningen løste vi i oppgave 4b) med  $2/5 - x$  istedet for  $y - x$ . Altså er  $y - x = 1/20$  km, eller 50 m.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} - \frac{\frac{2}{5} - y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}} \end{aligned}$$

Det første leddet på høyre side må være lik  $\frac{1}{13}$  for at  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ , så ligningen som skal løses er

$$\frac{1}{13} = \frac{\frac{2}{5} - y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}}.$$

Denne ligningen har vi også løst i oppgave 4 b), da med  $\frac{2}{5} - x$  istedet for  $\frac{2}{5} - y$ . Derfor er  $2/5 - y = 3/10$  km eller 300 m. Vi kan nå fastslå at  $y = 2/5 - 3/10 = 1/10$  og at  $x = 1/10 - 1/20 = 1/20$  og at dette er det eneste kritiske punktet og en kandidat til absolutt minimum. Altså

$$\nabla T(x, y) = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/10 \end{pmatrix} =: \hat{\mathbf{x}}_4 \in \mathcal{D}.$$

Verdien til  $T$  i  $\hat{\mathbf{x}}_4$  er

$$\begin{aligned} T(\hat{\mathbf{x}}_4) &= \frac{1}{20 \cdot 13} + \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2}}{5} + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}}{12} \\ &\approx 0.05693 \end{aligned}$$

som er mindre enn 0.05697, som var minste verdi på randen.

Absolutt minimum oppnås altså i  $\hat{\mathbf{x}}_4 = \begin{pmatrix} 1/20 \\ 1/10 \end{pmatrix}$ . Dvs. Du skal løpe  $1/20$  km = 50 m langs elvebredden og deretter svømme slik at du kommer i land  $1/10$  km = 100 m opp elvebredden på motsatt side. Det er mulig å komme seg fra start mål på 0.05693 timer = 3 minutter og 24.95 sekunder (14 hundredeler raskere enn hvis du begynner å svømme med en gang!).

Figuren i oppgaven viser den raskeste ruten.