NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0002 Brukerkurs i matematikk B**

Faglig kontakt under eksamen: Karl K. Brustad

Tlf: 98 88 37 71

Eksamensdato: 26. mai 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Oppgavesettet består av 10 deloppgaver som alle er likt vektlagt. Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Finn alle likevektsløsningene til differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + y - 2$$

og avgjør om de er stabile eller ustabile.

b) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + y - 2, \quad y(0) = -1.$$

c) La $y(x)$ være løsningen til oppgave **b)**. Beregn de to grenseverdiene

$$\lim_{x\to-\infty} y(x), \quad \lim_{x\to\infty} y(x)$$

og avgjør hvilken av de fire grafene (a)-(d) i figur 1 som er grafen til $y(x)$. (Hint: det *er* mulig å besvare denne oppgaven uten å ha løst oppgave **b)**)

Oppgave 2 En stabel med mynter består av kronestykker og av fem-kroner. Du måler stabelen og finner at den er 601 g tung og 197.5 mm høy.

Hvor mye er stabelen verdt når du vet at et kronestykke veier 4.35 g og har en tykkelse på 1.7 mm og at en fem-krone veier 7.85 g og har en tykkelse på 2 mm?

(kilde: Norges Bank)

Oppgave 3 La A være 2×2-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

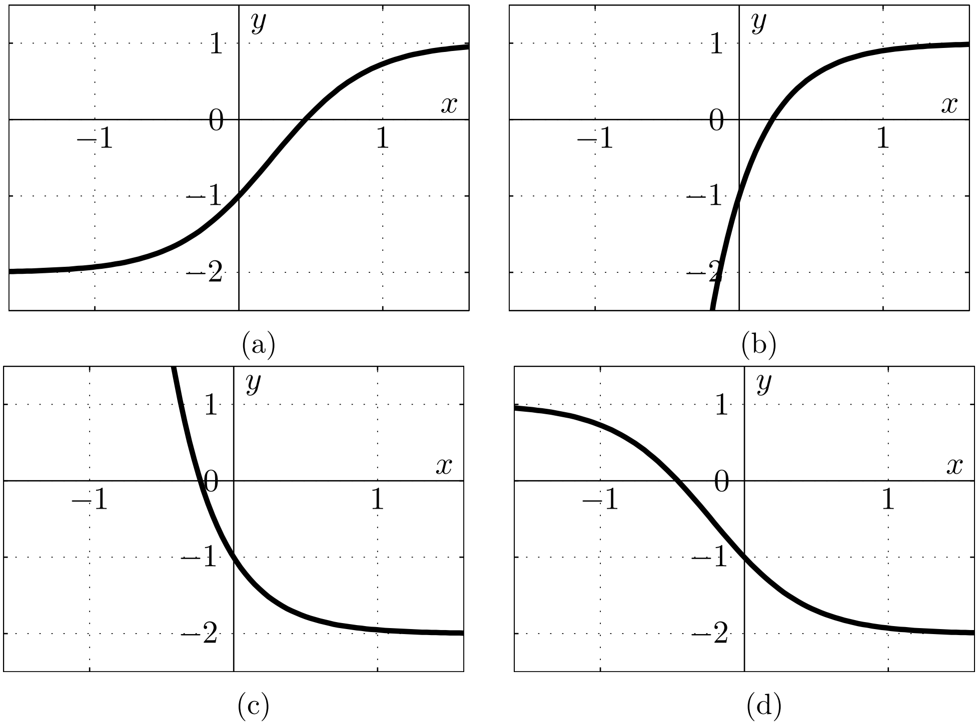
a) Finn egenverdiene $\lambda_1 < \lambda_2$ til A og tilhørende egenvektorer $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$. Om mulig, skalér egenvektorene slik at komponentene blir små positive heltall.

b) La U være 2×2-matrisen med kolonner bestående av egenvektorene til A, dvs.

$$U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2),$$

og la Λ *(gr: Lambda)* være 2×2-matrisen med egenverdiene til A på diagonalen:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$



Figur 1: Finn riktig graf i oppgave 1c)

1. Beregn Λ^2. Hva er Λ^n for et vilkårlig positivt heltall n?
2. Finn U^{-1} og beregn produktet $U\Lambda U^{-1}$.

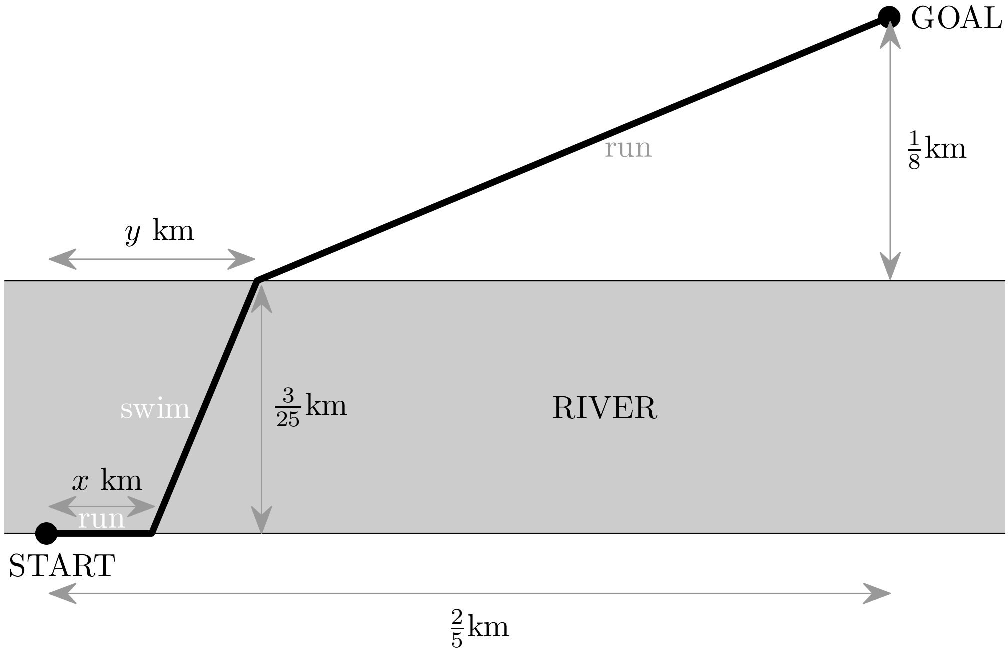
c) La B og C være to kvadratiske matriser der B er inverterbar. Vis at

$$\left(BCB^{-1}\right)^n = BC^nB^{-1}$$

for alle positive heltall n. Finn deretter 2×2-matrisen A^6.

Oppgave 4 Du står i “START” ved elvebredden til en elv som er 120 m $= \frac{3}{25}$ km bred og ønsker å komme deg til “GOAL” som ligger 400 m $= \frac{2}{5}$ km opp elven og 125 m $= \frac{1}{8}$ km fra elvebredden på motsatt side (se figur 2). For å komme dit kan du løpe et stykke langs elven, så må du – på et eller annet tidspunkt – svømme over elven til den andre siden, men deretter kan du løpe i en rett linje mot “GOAL”.

La x være antall km du løper langs elvebredden før du hopper i elven og anta at du kommer i land y km opp langs elvebredden på den andre siden.



Figur 2: Løp, svøm og løp i oppgave 4

Du kan løpe langs elvebredden med en hastighet på 13 km/t, du svømmer med en hastighet på 5 km/t, mens på den andre siden av elven er det litt tøffere terreng der løpshastigheten er 12 km/t.

a) Finn tiden $T(x, y)$, i timer, det tar å komme seg fra "START" til "GOAL" som en funksjon av x og y, og vis at gradienten til T er gitt ved

$$\nabla T(x,y) = \left(\frac{1}{13} - \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}}, \frac{y-x}{5\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2 + (y-x)^2}} - \frac{\frac{2}{5} - y}{12\sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - y\right)^2}} \right)$$

(Hint: Pythagoras, og husk at *tid = lengde/hastighet*)

b) For å komme raskest mulig frem, er det åpenbart at man ikke bør løpe mer enn $\frac{2}{5}$ km langs elvebredden og heller ikke svømme i en slik retning at y blir mindre enn x. Vi bestemmer derfor at domenet til T er den lukkede og begrensede mengden

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y)^T \;\middle|\; 0 \leq x \leq \frac{2}{5},\ x \leq y \leq \frac{2}{5} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Skissér mengden $\mathcal{D}$ i x, y-planet.

Hvis du begynner å svømme med en gang, dvs. $x = 0$, så er raskeste reisetid på 0.05697 timer = 3 minutter og 25.09 sekunder. Har T noen mindre verdi enn 0.05697 på randen av $\mathcal{D}$?

c) Finn hvor funksjonen

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

har absolutt minimum. Hvor raskt er det mulig å komme seg fra “START” til “GOAL”?