Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsning: Oppgave 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

På grunn av nullen, utvikler vi determinanten langs første rad og finner at

$$\begin{aligned} \det A &= 1 \cdot (2 \cdot 1 + 7 \cdot 4) + 3(2 \cdot 4 - 2 \cdot 3) \\ &= 30 + 6 = 36. \end{aligned}$$

Ligningssystemet kan løses ved radreduksjon på den utvidede matrisen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ -2 & 2 & 7 & 23 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 13 & 43 \\ 0 & -4 & -8 & -32 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b + 2a \\ c - 3a \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 2 & 13 & 43 \\ 0 & 0 & 18 & 54 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c + 2b. \end{matrix} \end{aligned}$$

Dermed er $z = 54/18 = 3$ og $y = (43 - 13z)/2 = 2$ og $x = 10 - 3z = 1$. Altså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Løsning: Oppgave 2

$$\begin{aligned}
z &= \frac{(1+3i)^2}{1-i} \\
&= \frac{1-9+i(3+3)}{1-i} \\
&= \frac{-8+6i}{1-i} \\
&= (-8+6i)\frac{\overline{1-i}}{|1-i|^2} \\
&= \frac{(-8+6i)(1+i)}{2} \\
&= \frac{1}{2}(-8-6+i(-8+6)) \\
&= -7-i.
\end{aligned}$$

Altså er $\Re(z) = -7$ og $\Im(z) = -1$. Merk at for alle komplekse tall $w \neq 0$ så er $\frac{1}{w}$ definert som $\frac{1}{w} = \frac{\overline{w}}{|w|^2}$.

Løsning: Oppgave 3 a)
Ved produktregelen er

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{kx}\left(\frac{q(x)}{k} - \frac{q'(x)}{k^2} + \frac{q''(x)}{k^3}\right) \\
&= ke^{kx}\left(\frac{q(x)}{k} - \frac{q'(x)}{k^2} + \frac{q''(x)}{k^3}\right) + e^{kx}\left(\frac{q'(x)}{k} - \frac{q''(x)}{k^2} + \cancel{\frac{q'''(x)}{k^3}}\right) \\
&= e^{kx}\left(q(x) - \frac{q'(x)}{k} + \frac{q''(x)}{k^2}\right) + e^{kx}\left(\frac{q'(x)}{k} - \frac{q''(x)}{k^2}\right) \\
&= e^{kx}\left(q(x) - \frac{q'(x)}{k} + \frac{q''(x)}{k^2} + \frac{q'(x)}{k} - \frac{q''(x)}{k^2}\right) \\
&= e^{kx}q(x).
\end{aligned}$$

Merk at $q'''(x) = 0$ ettersom q er et andregradspolynom.

Løsning: Oppgave 3 b)
IVP:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = x^2 + 3x + 1, \qquad y(0) = 1.$$

Differensialligningen er førsteordens lineær. Dvs. på formen $y' + p(x)y = q(x)$ der $p(x) = 2$ og $q(x) = x^2 + 3x + 1$.

Integrerende faktor er e^{2x}, og

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{2x} y &= 2e^{2x}y + e^{2x}y' \\
&= e^{2x}(y' + 2y) \\
&= e^{2x}q(x).
\end{aligned}$$

Ettersom $q(x)$ er et andregradspolynom, kan vi bruke resultatet fra oppgave a) med $k = 2$ og få at

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= e^{2x}\left(\frac{q(x)}{2} - \frac{q'(x)}{2^2} + \frac{q''(x)}{2^3}\right) + C \\ &= e^{2x}\left(\frac{x^2+3x+1}{2} - \frac{2x+3}{4} + \frac{2}{8}\right) + C \\ &= e^{2x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C. \end{aligned}$$

Initialbetingelsen gir at

$$1 = e^0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 + C,$$

så dermed er løsningen gitt ved

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + x + e^{-2x}.$$

Løsning: Oppgave 4 a)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\sin x - ky. \end{aligned} \tag{1}$$

La $\mathbf{f}$ være vektorfunksjonen

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x - ky \end{pmatrix}.$$

Likevektspunktene er løsningene til ligningen $\mathbf{0} = \mathbf{f}(x,y)$, dvs. $y = 0$ og $\sin x = 0$. Vi har altså uendelig mange likevektspunkter, men alle ligger på x-aksen og er på formen

$$\hat{\mathbf{x}}_n = \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Disse punktene tilsvarer situasjonen der pendelen har null hastighet ($y = 0$), og der pendelen henger rett ned (n partall) eller står rett opp (n oddetall).

Løsning: Oppgave 4 b)

Vi finner Jacobi-matrisen til $\mathbf{f}$:

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -k \end{pmatrix}.$$

I likevektspunktene er denne matrisen gitt ved

$$A_n := D\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos n\pi & -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -k \end{pmatrix}$$

der

$$\det A_n = -(-1)^{n+1} = (-1)^n \quad \text{og} \quad \operatorname{tr} A_n = -k < 0.$$

Vi kan dermed fastslå at $\mathbf{x}_n$ er et **stabilt** l.p. når n er et partall og et **ustabilt** l.p. når n er et oddetall.

Når n er et oddetall er $\mathbf{x}_n$ alltid et **sadelpunkt** fordi $\det A_n < 0$. Når n er et partall er $\det A_n > 0$ og

$$\begin{aligned}\Delta &= \operatorname{tr}^2 A_n - 4 \det A_n \\ &= k^2 - 4\end{aligned}$$

som er negativt for $0 < k < 2$ og l.p.ene er stabile **spiraler**. For $2 < k$ er Δ positiv og l.p.ene er stabile **noder**.

Disse siste to kategoriene tilsvarer henholdsvis situasjonen der friksjonen er liten slik at pendelen svinger frem og tilbake, men med stadig mindre utslag, og situasjonen der friksjonen er så stor at pendelen bare sklir ned mot l.p. uten å svinge.

Løsning: Oppgave 5 a)

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{5}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{y^2}{2} \\ \mathcal{D} &= \{(x, y) \mid f(x, y) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Vi er gitt to punkter $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ og $(x_2, y_2) = (2, 0)$.

For det første tilhører begge punktene domenet til f fordi

$$f(-1, 0) = \frac{5}{4} \geq 0 \tag{2}$$

og

$$f(2, 0) = \frac{7}{2} \geq 0. \tag{3}$$

For det andre er gradienten til f gitt ved $\nabla f(x, y) = (-x^3 + x^2 + 2x, -y)$, så begge punktene er kritiske fordi

$$\begin{aligned}-x^3 + x^2 + 2x &= -x(x^2 - x - 2) \\ &= -x(x - 2)(x + 1)\end{aligned} \tag{4}$$

og vi ser at $\nabla f(-1, 0) = \mathbf{0} = \nabla f(2, 0)$. Tilslutt finner vi Hess-matrisen til f for å kategorisere punktene:

$$\begin{aligned}Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3x^2 + 2x + 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dette gir matrisene

$$A_1 := Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A_2 := Hf(2,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

og begge punktene er **lokale maksimum** fordi $\det A_1$ og $\det A_2$ er positive, mens $\operatorname{tr} A_1$ og $\operatorname{tr} A_2$ er negative.

Fra likheten (4) ser vi at det finnes ett, og kun ett kritisk punkt til: $(x, y) = (0, 0)$, som også tilhører domenet fordi $f(0,0) = \frac{5}{6} \geq 0$. Dette er et **sadelpunkt** fordi

$$\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} < 0$$

og er dermed ikke en kandidat til absolutte ekstrema.

Ettersom domenet er lukket og begrenset og fordi gradienten eksisterer i alle punkter i domenet, finnes absolutt maks og min enten i de kritiske punktene eller på randen av domenet. På randen er selvfølgelig verdien til f konstant lik 0 og fra (2) og (3) kan vi fastslå at **absolutt maksimum** er 7/2 i (2,0) og **absolutt minimum** er 0.

Løsning: Oppgave 5 b)
En parametrisering av en linje i rommet, kan generelt skrives på formen

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$$

der $\mathbf{x}_0$ og $\mathbf{u}$ er vektorer i $\mathbb{R}^3$ som linjen henholdsvis går gjennom og er parallell med. Mastene har (x, y)-koordinater $(-1, 0)$ og $(2, 0)$ og taubanen går dermed i gjennom punktet

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ f(2,0)+1 \end{pmatrix}$$

og er parallell med vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ f(-1,0)+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ f(2,0)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ f(-1,0)-f(2,0) \end{pmatrix}.$$

Nå er $f(-1,0) = \frac{5}{4}$ og $f(2,0) = \frac{7}{2}$, så en parametrisering av taubanen er derfor gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{7}{2}+1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ \frac{5}{4}-\frac{7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3t \\ 0 \\ \frac{9}{2}-\frac{9}{4}t \end{pmatrix}.$$

Merk at ingen parametrisering er unik. Man kunne godt ha valgt det andre mastepunktet som $\mathbf{x}_0$ og hvilken som helst vektor $\mathbf{u}$ parallell med taubanen.

For å finne punktet der taubanen treffer bakken, finner vi først t-verdien når $z = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= z(t) \\ &= \frac{9}{2} - \frac{9}{4}t \\ &\Longleftrightarrow \\ t &= \frac{9/2}{9/4} = 2. \end{aligned}$$

Taubanen treffer altså bakken i punktet

$$\begin{pmatrix} x(2) \\ y(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3 \cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Løsning: Oppgave 5 c)

$$f(x_0, y_0) = f(1, -1) = \frac{17}{12} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (1, -1) \in \mathcal{D}.$$

Vi har at $\nabla f(x, y) = (-x^3 + x^2 + 2x, -y)$, så $\nabla f(1, -1) = (2, 1)$ og lineariseringen til f i (x_0, y_0) er gitt ved

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{17}{12} + (2, 1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{17}{12} + 2(x - 1) + y + 1 \\ &= \frac{5}{12} + 2x + y. \end{aligned}$$

Toppen av masten har høyde

$$H := f(2, 0) + 1 = \frac{7}{2} + 1 = \frac{9}{2}$$

og er mulig å se, hvis og bare hvis dette punktet ligger over tangentplanet $z = L(x, y)$:

$$\begin{aligned} L(2, 0) &= \frac{5}{12} + 2 \cdot 2 + 0 \\ &= \frac{53}{12} \\ &< \frac{54}{12} = \frac{9}{2} = H. \end{aligned}$$

Så, **ja**. Du ser den øverste tolvdelen av masten fra der du står.

Løsning: Oppgave 5 d)

Vi må finne den retningsderiverte til f i $(x_0, y_0) = (1, -1)$ i retningen fra $(1, -1)$

mot $(2,0)$. Enhetsvektoren som peker i den retningen er gitt ved

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \frac{(2,0)^T - (1,-1)^T}{|(2,0)^T - (1,-1)^T|} \\ &= \frac{(1,1)^T}{|(1,1)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

og den retningsderiverte er da

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f(1,-1) &= \nabla f(1,-1)\mathbf{u} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(2,1)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$