NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA0002 Brukerkurs i matematikk B**

Faglig kontakt under eksamen: Karl K. Brustad

Tlf: 98 88 37 71

Eksamensdato: August 2014

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: A: Alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt. Alle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Oppgavesettet består av 10 deloppgaver som alle er likt vektlagt. Alle svar må begrunnes.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finn determinanten til A og løs deretter det lineære ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 7 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2 Finn realdelen og imaginærdelen til det komplekse tallet

$$z = \frac{(1+3i)^2}{1-i}.$$

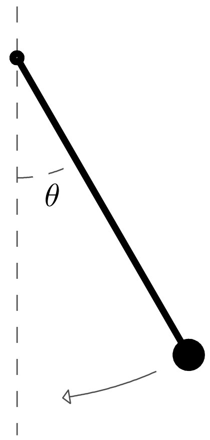
Oppgave 3

a) La k være et positivt heltall og la $q(x)$ være et andregradspolynom. Vis at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{kx}\left(\frac{q(x)}{k} - \frac{q'(x)}{k^2} + \frac{q''(x)}{k^3}\right)\right) = e^{kx}q(x).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = x^2 + 3x + 1, \qquad y(0) = 1.$$



Figur 1: Pendelen i oppgave 4. Et massepunkt sitter i enden av en stang som kan rotere om et oppheng.

Oppgave 4

Det viser seg at differensialligningen

$$\theta''(t) + k\theta'(t) + \sin\theta(t) = 0 \tag{1}$$

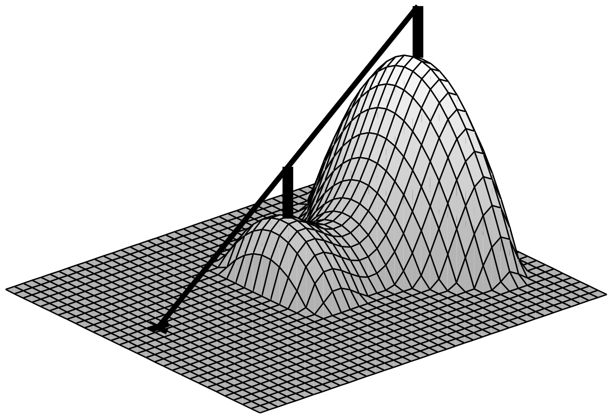
kan være en god modell for bevegelsen til en pendel under påvirkning av gravitasjon og friksjon. $\theta(t)$ er vinkelen mellom pendelen og den vertikale aksen ved tiden t (se figur 1), og konstanten $k > 0$ er et mål på hvor stor friksjonen (luftmotstand og friksjon i opphenget) som bremser svigningene er. Nå er ikke andreordens differensialligninger slik som (1) pensum i dette emnet, men hvis vi lar x være funksjonen gitt ved $x(t) = \theta(t)$ og y være funksjonen gitt ved $y(t) = \theta'(t)$ så kan (1) skrives som følgende system av førsteordens differensialligninger:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\sin x - ky. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Finn alle likevektspunktene til systemet (2). Hvilke situasjoner for pendelen tilsvarer likevektspunktene?

b) Bestem stabiliteten til likevektspunktene og finn ut hvordan klassifiseringen av dem avhenger av friksjonen $k > 0$.

(Du behøver ikke å drøfte tilfellet $k = 2$.)



Figur 2: Illustrasjon til oppgave 5. Et fjell med taubane.

Oppgave 5 La $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = \frac{5}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{y^2}{2}$$

på det lukkede og begrensede domenet

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \;\middle|\; \frac{5}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{y^2}{2} \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

a) Vis at punktene $(x_1, y_1) = (-1, 0)$ og $(x_2, y_2) = (2, 0)$ er lokale maksima til f. Har f flere kritiske punkter? Isåfall, hvilken type er disse? Finn deretter absolutt maksimum og absolutt minimum til f.

b) Et lite fjell med to topper er er beskrevet av flaten $z = f(x, y)$. Figur 2 viser grafen til f og en del av det omkringliggende landskapet $z = 0$. På de to toppene, $(-1, 0)$ og $(2, 0)$, står det master som er 1 enhet høye, og mellom toppen av mastene går det en rettlinjet taubane som fortsetter ned til bakkenivå. Finn en parametrisering $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ av linjen i rommet taubanen ligger på og finn punktet (x, y) der taubanen treffer bakken $z = 0$.

c) La $(x_0, y_0) = (1, -1) \in \mathcal{D}$. Finn lineariseringen $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ til f om (x_0, y_0). Anta at du står på fjellet i punktet $(x, y, z) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Er det mulig å se toppen av den høyeste masten fra der du er?

(Vi antar at øynene er på samme høyde som terrenget slik at det bare er mulig å se ting som ligger over tangentplanet til grafen der du står.)

d) Hva er stigningen i det du begynner å gå fra (x_0, y_0) mot den høyeste fjelltoppen?