Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag til eksamen i MA0002, Brukerkurs i matematikk B

29. mai 2013

Oppgave 1

a) Et plan i rommet har ligning

$$ax + by + cz + d = 0,$$

der a, b, c og d er tall. Planet går gjennom punktet $(1, 2, 1)$ og har normalvektor $\begin{bmatrix} 2, & 1, & 2 \end{bmatrix}'$. Finn a, b, c og d. Ligger punktet $(2, 4, -1)$ i planet?

Løsning: Planet har ligning $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) = 0$, der $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2, & 1, & 2 \end{bmatrix}'$ er normalvektoren, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x, & y, & z \end{bmatrix}'$ og $\mathbf{r_0} = \begin{bmatrix} 1, & 2, & 1 \end{bmatrix}'$. Skrevet ut blir det

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{bmatrix} &= 2(x-1) + (y-2) + 2(z-1) \\ &= 2x + y + 2z - 2 - 2 - 2 = 2x + y + 2z - 6 = 0 \end{aligned}$$

altså er $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$ og $d = -6$. Innsetting av $x = 2$, $y = 4$ og $z = -1$ gir

$$2 \cdot 2 + 4 + 2 \cdot (-1) - 6 = 4 + 4 - 2 - 6 = 0$$

så punktet $(2, 4, -1)$ ligger i planet. □

La

$$f(x, y) = \sin(y^2 - x).$$

b) Regn ut gradienten ∇f til f. I hvilken retning vokser f raskest i punktet $(1,1)$?

Løsning: Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y^2 - x) \cdot (-1) = -\cos(y^2 - x)$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y^2 - x) \cdot 2y = 2y\cos(y^2 - x)$$

som gir

$$\nabla f = \begin{bmatrix} -\cos(y^2 - x) \\ 2y\cos(y^2 - x) \end{bmatrix}$$

Videre har vi

$$\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} -\cos(1-1) \\ 2 \cdot 1\cos(1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

så f vokser raskest i retningen $\begin{bmatrix} -1, & 2 \end{bmatrix}'$ i punktet $(1,1)$. □

c) Skriv ned lineariseringen til f i punktet $(1,1)$ og bruk dette til å finne en tilnærming til $f(1.1, 0.9)$.

Løsning: Vi har $f(1,1) = \sin(1-1) = \sin(0) = 0$, $f_x(1,1) = -1$ og $f_y(1,1) = 2$. Dermed er lineariseringen til f gitt ved

$$L(x,y) = -(x-1) + 2(y-1)$$

Vi finner en tilnærming til $f(1.1, 0.9)$ ved å sette inn $x = 1.1$ og $y = 0.9$ i lineariseringen over:

$$f(1.1, 0.9) \approx L(1.1, 0.9) = -(1.1-1) + 2(0.9-0.1) = -0.3$$

Eksakt verdi er $\sin(0.9^2 - 1.1) \approx -0.28595\ldots$. □

Oppgave 2

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beregn produktene AB og BA. Hva forteller svarene deg om A og B?

Løsning: Matrisemultiplikasjon gir at $AB = I = BA$, noe som forteller oss at A er invertibel med invers B (og omvendt). □

b) Løs ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 7x_3 & = & -2 \end{array}$$

Løsning: Det enkleste er å gjøre bruk av det faktum at koeffisientmatrisen til systemet er nettopp matrisen A over, og siden vi vet at A er invertibel med invers B får vi at løsningen er gitt ved

$$\mathbf{x} = B \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

altså $x_1 = 20$, $x_2 = 5$ og $x_3 = -6$. Alternativt kan man bruke Gausseliminasjon. $\square$

Oppgave 3 Finn

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)}$$

ved hjelp av delbrøkoppspalting.

Løsning: Nevneren i integranden består av distinkte førstegradsfaktorer og kan dermed skrives

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

Vi setter uttrykket på felles nevner igjen:

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + B - A}{(x+1)(x-1)}$$

som betyr at $A + B = 0$ og $B - A = 1$, altså $A = -B$ og $B - (-B) = 2B = 1$, altså $B = 1/2$ og $A = -1/2$. Vi har altså

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-1)} &= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \frac{-\ln|x+1| + \ln|x-1|}{2} + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C \end{aligned}$$

$\square$

Oppgave 4 Løs initialverdiproblemet

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\cos(x)$$

med $y(0) = 2$.

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

eller

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \sin(x) \; + C \\ |y| &= e^{\sin(x)+C} = e^C e^{\sin(x)} \\ y &= \pm e^C e^{\sin(x)} = ke^{\sin(x)} \end{aligned}$$

der $k \neq 0$ er en konstant ($k = 0$ gir oss også en løsning, nemlig den konstante løsningen $y(x) = 0$ for alle x). Vi har

$$y(0) = ke^{\sin(0)} = ke^0 = k$$

så $k = 2$. Løsningen av initialverdiproblemet er dermed $y(x) = 2e^{\sin(x)}$. □

Oppgave 5 La

$$g(x, y) = \frac{1}{3}y^3 - xy + x.$$

Finn det globale (absolutte) maksimum og minimum til g på kvadratet begrenset av linjene $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ og $y = 2$ (altså $0 \leq x \leq 2$ og $0 \leq y \leq 2$).

Løsning: Vi finner først kritiske punkter; vi har

$$\nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} -y + 1 \\ y^2 - x \end{bmatrix}$$

og $\nabla g(x, y) = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $y = 1$ og $x = y^2 = 1$. Dette punktet befinner seg på området vi skal undersøke.

Vi undersøker så hva som skjer på randen av området; for $x = 0$ får vi

$$f_1(y) = g(0, y) = \frac{1}{3}y^3$$

$f_1'(y) = y^2 = 0$ hvis og bare hvis $y = 0$, som gir punktet $(0,0)$ (men dette er et hjørne og må undersøkes uansett).

For $x = 2$ får vi

$$f_2(y) = g(2,y) = \frac{1}{3}y^3 - 2y + 2$$

og $f_2'(y) = y^2 - 2 = 0$ hvis og bare hvis $y = \pm\sqrt{2}$. Ethvert punkt med negativ y-koordinat er utenfor området, så vi står igjen med punktet $(2, \sqrt{2})$.

For $y = 0$ får vi

$$h_1(x) \ = g(x,0) = x$$

og $h_1'(x) = 1$, som aldri er 0.

Til slutt, for $y = 2$ får vi

$$h_2(x) = g(x,2) = \frac{2^3}{3} - 2x + x = \frac{8}{3} \ - x$$

og $h_2'(x) = -1$, som igjen aldri er 0.

Vi må altså sjekke alle hjørnene til kvadratet, samt $(1,1)$ og $(2, \sqrt{2})$:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0 \\
f(2,0) &= \frac{1}{3}0^3 - 2 \cdot 0 + 2 = 2 \\
f(0,2) &= \frac{2^3}{3} - 0 \cdot 2 + 0 = 8/3 \\
f(2,2) &= \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2 + 2 = 8/3 - 2 = 2/3 \\
f(1,1) &= \frac{1^3}{3} - 1 \cdot 1 + 1 = 1/3 \\
f(2, \sqrt{2}) &= \frac{\sqrt{2}^3}{3} - 2\sqrt{2} + 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + 2 = -\frac{4\sqrt{2}}{3} + 2
\end{aligned}$$

Det betyr at g's globale maksimum er i $(0,2)$, mens det globale minimum er i $(0,0)$. $\square$

Oppgave 6 La

$$A = \begin{bmatrix} a & -5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix},$$

der a er en konstant.

a) Anta at $a = 3$. Finn egenverdiene til A samt tilhørende egenvektorer. Løs initialverdiproblemet

$$\begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

med $x_1(0) = 1$ og $x_2(0) = 0$.

Løsning: Dersom $a = 3$, har vi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

og vi ser at $\operatorname{tr} A = -3$ og $\det A = -18 - 4 \cdot (-5) = 2$, så

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

som har røtter

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \{-2, -1\}$$

Egenvektorene finner vi ved å løse systemet $(A - \lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. For $\lambda = -2$ har vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

og det resulterende ligningssystemet kan reduseres til $u_1 - u_2 = 0$, så $\begin{bmatrix} 1, & 1 \end{bmatrix}'$ er en egenvektor tilhørende $\lambda = -2$. For $\lambda = -1$ får vi

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

og det resulterende ligningssystemet kan reduseres til $4u_1 - 5u_2 = 0$, så $\begin{bmatrix} 5, & 4 \end{bmatrix}'$ er en egenvektor tilhørende $\lambda = -1$.

Generell løsning for systemet av differensialligninger er dermed

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det følger at

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c_1 + c_2 \\ 4c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

Betingelsen $x_2(0) = 0$ gir $-4c_1 = c_2$, som innsatt i første ligning gir $5c_1 + (-4c_1) = c_1 = 1$ og $c_2 = -4$, altså er løsningen på initialverdiproblemet gitt ved

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} - 4e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

b) Anta nå at $a < 0$. Er likevektspunktet i origo stabilt eller ustabilt? (Hint: dersom λ_1, λ_2 er egenverdiene til A, er $\lambda_1\lambda_2 = \det(A)$ og $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$).

Løsning: Vi har $\operatorname{tr} A = a - 6 < 0$ og $\det A = -6a + 20 > 0$. Førstnevnte forteller oss at egenverdiene alltid har samme fortegn (eller at realdelen til egenverdiene har samme fortegn, noe som alltid er tilfellet), og sistnevnte forteller oss at egenverdiene er negative (eller at de har negativ realdel). Det betyr at likevektspunktet i origo alltid er stabilt. $\square$