



Faglig kontakt under eksamen:  
Alexander Lundervold (95931335)

## Eksamen i Brukerkurs i matematikk B (MA0002)

Mandag 21. mai 2012

Tid: 09:00 – 13:00

Sensur 10. juni 2012

Hjelpemidler: Kalkulator og alle trykte og håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Hver av de fem oppgavene teller likt (20%).

Svarene skal begrunnes. Vis mellomregning eller henvis til teori.

### Oppgave 1

a) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y^2$$

med initialbetingelsen  $y(0) = 1$ .

Ifølge Newtons avkjølingslov vil temperaturen  $y(t)$  til et objekt endre seg med en rate som er proporsjonal med differansen mellom objektets temperatur og temperaturen  $T$  til omgivelsene. Det vil si at

$$\frac{dy}{dt} = k(y - T),$$

der  $k$  er en konstant.

- b) Et rom holder en konstant temperatur på 20 grader. Ved tiden  $t = 0$  plasseres en kopp kaffe med en temperatur på 90 grader i rommet. Etter 2 minutter er kaffens temperatur 80 grader. Hvor mange minutter tar det før temperaturen blir 65 grader?  
(Hint: kaffens temperatur etter 2 minutter kan brukes til å bestemme konstanten  $k$ .)

**Oppgave 2** La  $B$  og  $C$  være matrisene

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) Beregn produktet  $BC$ .
- b) Finn egenverdiene og egenvektorene **til matrisen B**
- c) La  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Regn ut  $B^5\mathbf{x}$ .

**Oppgave 3** La  $A$  være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- a) Beregn determinanten  $\det(A)$  til  $A$ .
- b) Finn inversen  $A^{-1}$  til  $A$ .
- c) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + z &= 1 \\ 3x + 2z &= 1. \end{aligned}$$

**Oppgave 4** La

$$f(x, y) = xe^{y^2-x}$$

- a) Finn gradienten  $\nabla f$  til  $f$ .

- b) Regn ut den retningsderiverte til  $f$  i punktet  $(4, 2)$  i retning av vektoren  $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . I hvilken retning fra punktet  $(4, 2)$  vokser  $f$  raskest?
- c) Finn alle de kritiske punktene til  $f$ , og avgjør om de er lokale maksimum, lokale minimum eller sadelpunkt til  $f$ .
- d) Finn de globale (eller *absolutte*) maksimum og minimum til  $f$  på området gitt ved

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

### Oppgave 5

- a) Finn løsningen på systemet av differensialligninger

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y \\ \frac{dy}{dt} &= 3x - 4y \end{aligned}$$

med initialbetingelsen  $x(0) = 3$ ,  $y(0) = 4$

- b) Er ekvilibrumpunktet (også kalt *likevektspunktet*)  $(0, 0)$  til systemet stabilt eller ustabil? Hva skjer med systemets løsninger når  $t$  går mot  $\infty$ ?