MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2017

Løsningsforslag — Øving 2

Kapittel 7.3: Rasjonale funksjoner og delbrøkoppspaltning

$\boxed{7.3:3}$ Bruk polynomdivisjon for å skrive

$$f(x) := \frac{3x^3 + 5x - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

som en sum av et polynom og en rasjonal funksjon $\frac{P}{Q}$ der $\deg P \leq \deg Q$.
($\deg P :=$ graden til polynomet P)

Løsning:
Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r|l} & 3x - 2 \\ \hline x^2+1 & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 2 \\ & -3x^3 \qquad\quad - 3x \\ \hline & -2x^2 + 2x - 2 \\ & 2x^2 \qquad\quad + 2 \\ \hline & 2x \end{array}$$

Altså er

$$f(x) = 3x - 2 + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$\boxed{7.3:7}$ Finn delbrøkoppspaltningen til

$$f(x) := \frac{4x^2 - 14x - 6}{x(x-3)(x+1)}.$$

Løsning:

Vi forsøker å finne konstanter A, B og C slik at $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2-14x-6}{x(x-3)(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+1} \\
&= \frac{A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+1)} \\
&\iff \\
4x^2-14x-6 &= A(x-3)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-3) \\
&= (A+B+C)x^2 + (B-3C-2A)x - 3A \\
&\iff
\end{aligned}$$

$A+B+C = 4$, $B-3C-2A = -14$ og $-3A = -6$. Dvs. $A = 2$, $B = -1$ og $C = 3$. Altså er

$$f(x) = \frac{4x^2-14x-6}{x(x-3)(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1}.$$

$\boxed{\text{7.3:11}}$ (valgfritt) Finn delbrøkoppspaltningen til

$$f(x) := \frac{4x+1}{x^2-3x-10}.$$

Løsning:
Vi faktoriserer nevneren: $x^2-3x-10 = (x-5)(x+2)$ og forsøker å finne konstanter A og B slik at $f(x) = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{4x+1}{x^2-3x-10} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2} \\
&= \frac{A(x+2) + B(x-5)}{(x-5)(x+2)} \\
&\iff \\
4x+1 &= A(x+2) + B(x-5) \\
&= (A+B)x + 2A - 5B \\
&\iff
\end{aligned}$$

$A+B = 4$ og $2A-5B = 1$. Dette er et lineært ligningssett med to ukjente. Løsningen er $A = 3$ og $B = 1$. Dette gir

$$f(x) = \frac{4x+1}{x^2-3x-10} = \frac{3}{x-5} + \frac{1}{x+2}.$$

$\boxed{\text{7.3:18}}$ Evaluér integralet $I := \int f(x)\,\mathrm{d}x$ der

$$f(x) := \frac{4x^2-x-1}{(x+1)^2(x-3)}$$

ved hjelp av delbrøkoppspaltning.

Løsning:
Integranden er en rasjonal funksjon der graden til telleren, 2, er mindre enn graden til nevneren, 3. Nevneren er også maksimalt faktorisert, så vi forsøker å finne tre konstanter A, B og C slik at

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{4x^2-x-1}{(x+1)^2(x-3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-3} \\
&= \frac{A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-3)} \\
&\iff \\
4x^2 - x - 1 &= A(x+1)(x-3) + B(x-3) + C(x+1)^2 \\
&= (A+C)x^2 + (-2A+B+2C)x + (-3A-3B+C) \\
&\iff \\
A + C &= 4 \\
-2A + B + 2C &= -1 \\
-3A - 3B + C &= -1.
\end{aligned}$$

Dette er et lineært ligningssystem med tre ukjente som kan løses på vanlig måte. Vi derfor, ved å løse ligningssystem får:

$$A = 2, \quad B = -1, \quad C = 2.$$

Dette gir

$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-3}.$$

og dermed er:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4x^2-x-1}{(x+1)^2(x-3)} \,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-3} \right) \mathrm{d}x \\
&= 2\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} - 2\ln|x-3| + C.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.3:20}}$ Evaluér integralet $I := \int f(x)\,\mathrm{d}x$ der

$$f(x) := \frac{x^3 - 3x^2 + x - 6}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

ved hjelp av delbrøkoppspaltning.

Løsning:
Integranden er en rasjonal funksjon der graden til telleren, 3, er mindre enn graden til

nevneren, 4. Nevneren er også maksimalt faktorisert, så vi forsøker å finne fire konstanter A, B, C og D slik at

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 - 3x^2 + x - 6}{(x^2+2)(x^2+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+1)} \\
&\iff \\
x^3 - 3x^2 + x - 6 &= (Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2+2) \\
&= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+2C)x + B + 2D \\
&\iff \\
A + C &= 1 \\
B + D &= -3 \\
A + 2C &= 1 \\
B + 2D &= -6.
\end{aligned}$$

Dette er et lineært ligningssystem med fire ukjente som kan løses på vanlig måte. Vi observerer at systemet faktisk består av to uavhengige ligningssystem, hver med bare to ukjente, og er derfor lettere å løse:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -3.$$

Dette gir

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2} - \frac{3}{x^2+1}.$$

Vi har at $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C'$ og at

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}, \qquad \text{SUB: } u = x^2+2,\ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| + C' \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C'.
\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^3 - 3x^2 + x - 6}{(x^2+2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - 3\arctan x + C.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.3:26}}$ (valgfritt) Evaluér integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 5}$$

ved å fullføre kvadratet i nevneren.

Løsning:
Polynomet i nevneren kan ikke faktoriseres i lineære faktorer fordi diskriminanten

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0.$$

Fullfører kvadratet:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 5 &= (x+1)^2 - 1 + 5 \\ &= (x+1)^2 + 4. \end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 + 4} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{(x+1)^2}{4} + 1}, \qquad \text{må få nevneren på formen } u^2 + 1, \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1}, \qquad \text{SUB: } u = \frac{x+1}{2},\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u, \\ &= \frac{2}{4} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \arctan u + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

$\boxed{7.3:35}$ Evaluér integralet

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Integranden er en rasjonal funksjon der graden til både telleren og nevnerer er 2. Derfor polynomdivisjon gir:

$$\begin{array}{r|r} & 1 \\ \hline x^2 - 4 & x^2 + 4 \\ & -\,x^2 + 4 \\ \hline & 8 \end{array}$$

Altså er

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} = 1 + \frac{8}{x^2 - 4}$$

Derfor

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x + \int \frac{8}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$$

Andre del av integralet over kan løses ved delbrøkoppspaltning. Det vil si, anta:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-2)} \\ &= \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x+(2B-2A)}{(x+2)(x-2)} \\ &\iff \end{aligned}$$

$A + B = 0$ og $2B - 2A = 1$. Dette er et lineært ligningssett med to ukjente. Løsningen er $A = -\frac{1}{4}$ og $B = \frac{1}{4}$. Dette gir

$$\frac{8}{x^2-4} = 8\left(\frac{-1}{4}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x-2}\right) = 2\left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right)$$

Dermed er:

$$\begin{aligned}\int \frac{8}{x^2-4}\,\mathrm{d}x &= 2\int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\left(-\ln|x+2| + \ln|x-2|\right) + C' \\ &= 2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C'\end{aligned}$$

Altså:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = x + 2\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$\boxed{\text{7.3:44}}$ Evaluér integralet

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Vi ser at dette integralet can løses ved bruk av delvis integrasjon, der vi antar:

$$u = \tan^{-1}x \implies u' = \frac{1}{1+x^2}$$

og

$$v' = x \implies v = \frac{x^2}{2}$$

Derfor:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\tan^{-1}(1) - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[\int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\big[(x)_0^1 - (\tan^{-1})_0^1\big] \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\big[(1-0) - (\tan^{-1}1 - \tan^{-1}0)\big] \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\big[1 - \frac{\pi}{4}\big] = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Derfor:

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{7.3:47}}$ Evaluér integralet

$$\int \frac{4}{(1-x)(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Løsning:
Vi bruker delbrøskoppspaltning for å løse integralet. Anta at:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(1-x)(1+x)^2} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{(1+x)^2} \\
&= \frac{A(1+x)^2 + B(1-x)(1+x) + C(1-x)}{(1-x)(1+x)^2} \\
&= \frac{(A-B)x^2 + (2A-C)x + (A+B+C)}{(1-x)(1+x)^2} \\
&\iff \\
4 &= (A-B)x^2 + (2A-C)x + (A+B+C)
\end{aligned}$$

Altså

$$A + B + C = 4$$

$$A - B = 0$$

$$2A - C = 0.$$

Dette er et lineært ligningssett med tre ukjente. Løsningen er $A = 1$, $B = 1$ og $C = 2$. Dermed er:

$$\begin{aligned}
\int \frac{4}{(1-x)(1+x)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= -\ln|1-x| + \ln|1+x| - \frac{2}{1+x} + C \\
&= -\frac{2}{1+x} + \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C
\end{aligned}$$

$\boxed{7.3{:}53}$ (a.) For å fulføre eksempel 8, vis at

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}.$$

Løsning:
Ved å åpne $x^4(1-x)^4$ i telleren vi får:

$$\begin{aligned}
x^4(1-x)^4 &= x^4(x^2+1-2x)^2 \\
&= x^4(x^4+6x^2-4x^3-4x+1) \\
&= x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4
\end{aligned}$$

Ved vruk av polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 \\
\hline
x^2+1 & x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4 \\
 & -x^8 - x^6 \\
\cline{2-2}
 & -4x^7 + 5x^6 - 4x^5 \\
 & 4x^7 + 4x^5 \\
\cline{2-2}
 & 5x^6 + x^4 \\
 & -5x^6 - 5x^4 \\
\cline{2-2}
 & -4x^4 \\
 & 4x^4 + 4x^2 \\
\cline{2-2}
 & 4x^2 \\
 & -4x^2 - 4 \\
\cline{2-2}
 & -4
\end{array}$$

Altså er

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2}$$

$\boxed{7.3{:}53}$ (b.) Vis at

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x.$$

og konkluder at:

$$\frac{1}{1260} \le \frac{22}{7} - \pi \le \frac{1}{630}.$$

Bruk resultatet for å vise at

$$3.140 \le \pi \le 3.142.$$

Løsning:
Når

$$0 \le x \le 1 \implies 1 \le 1 + x^2 \le 2 \implies \frac{1}{2} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$$

Altså:

$$\frac{x^4(1-x)^4}{2} \le \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \le x^4(1-x)^4$$

også,

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x.$$

hvor $\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}$ er kotinuerlig funksjon som kan avledes mellom 0 og 1. Fra eksempel 8 i boka har vi:

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi$$

og ved bruk av (a.):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{2} + \frac{6x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{630}
\end{aligned}$$

Ved bruk ac forste delen av oppgave, får vi:

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{1260} \le \frac{22}{7} - \pi \le \frac{1}{630}.$$

også:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1260} \le \frac{22}{7} - \pi \le \frac{1}{630} &\implies \frac{1}{1260} - \frac{22}{7} \le -\pi \le \frac{1}{630} - \frac{22}{7} \\
&\implies \frac{22}{7} - \frac{1}{630} \le \pi \le \frac{22}{7} - \frac{1}{1260} \\
&\implies 3.140 \le \pi \le 3.142.
\end{aligned}$$

Kapittel 8.1: Differensialligninger

$\boxed{\text{8.1:7}}$ Løs initialverdiproblemet (IVP)

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3t+1}, \qquad s(0) = 1.$$

Løsning:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{3t+1}$$
$$\Rightarrow$$
$$\mathrm{d}s = (\sqrt{3t+1})\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow$$
$$\int \mathrm{d}s = \int \sqrt{3t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$\Rightarrow$$
$$s = \frac{2}{9}(3t+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

INIT: $1 = s(0) = \frac{2}{9} + C$. Dvs. C $= \frac{7}{9}$ og løsningen er

$$s = \frac{2}{9}(3t+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{9}$$

for $t \geq \frac{-1}{3}$ fordi $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ vil ikke være reell hvis $t \leq \frac{-1}{3}$.

$\boxed{\text{8.1:10}}$ Mengden fosfor i en innsjø ved tiden t er gitt ved en funksjon $P(t)$ som tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 3t+1, \qquad P(0) = 0.$$

Finn mengden fosfor i innsjøen ved tiden $t = 10$.

Løsning:

$$P = \int (3t+1)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2 + t + C.$$

INIT: $0 = P(0) = 0 + 0 + C$. Så $C = 0$ og funksjonen P er gitt ved

$$P(t) = \frac{3}{2}t^2 + t.$$

Mengden fosfor i innsjøen ved tiden $t = 10$ er da

$$P(10) = \frac{3}{2}10^2 + 10 = 160.$$

$\boxed{\text{8.1:18}}$ Befolkningen er tegnet mot tid på en semilog graph slik at det ser ut som et rett linje med skråningen -0.43 og møter vertikal akse på 1. Finn differensialligning som viser befolkningsvekstrate på tidspunkt t mot befolkning størrelse på t.

Løsning:
Anta at befolkningsstørrelse er p og tid som t. Dermed plott vil representere en rett linje:

$$\ln|p| = -0.43t + 1$$

og differensialigningen vil være:

$$\ln|p| = -0.43t + 1 \implies \frac{1}{p}\,\mathrm{d}p = -0.43\,\mathrm{d}t$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -0.43p.$$

$\boxed{8.1.21}$ Anta at en populasjon, hvis størrelse ved tid t, som vi betegner med $N(t)$, oppfyller ligningen

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{100}N^2, \qquad N(0) = 10 \tag{1}$$

a) Løs (1).

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\int \frac{dN}{N^2} = -\frac{1}{N} = \frac{1}{100}\int dt = \frac{t}{100} + C$$

altså

$$\frac{1}{N} = \frac{-t}{100} + C$$
$$N = \frac{1}{C - \frac{t}{100}}$$

Siden

$$N(0) = \frac{1}{C} = 10$$

får vi $C = 1/10$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{10} - \frac{t}{100}} = \frac{1}{\frac{10-t}{100}} = \frac{100}{10-t}$$

□

b) Tegn grafen til $N(t)$ for $0 \leq t \leq 10$. Hva skjer når $t \to 10$? Forklar med ord hva dette betyr.

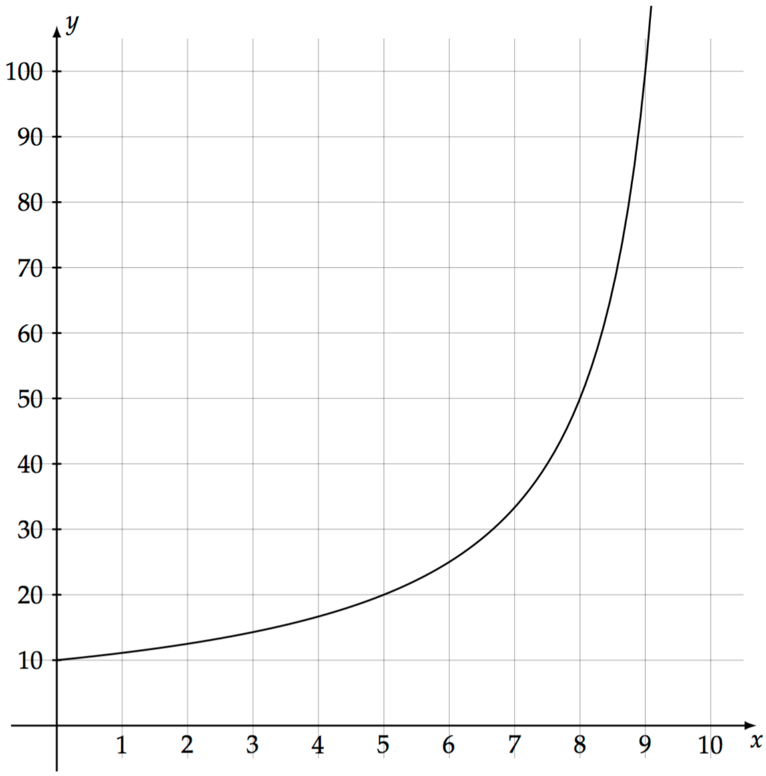
Løsning: Grafen er tegnet på figur 1. Vi ser tydelig at

$$\lim_{t\to 10^-} N(t) = \infty$$

både fra grafen og uttrykket for $N(t)$ over, som betyr at populasjonen eksploderer.

$\boxed{8.1:23}$ Anta at $L(t)$ er lengde til en fisk på tidspunkt t og den vokser ift. von Bertalanffy ligning:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k(L_\infty - L(t)) \text{ med } L(0) = 1.$$



Figur 1: Løsningen av initialverdiproblemet (1)

hvor k og L_∞ er positive konstanter. Det viste en studie at asymptotisk lengde av fisken er 123 og den tar 27 måneder for å nå halv av dens asymtptotisk lengde.
(a.) Finn konstanter k og L_∞.
(b.) Finn lengde av fisken etter 10 måneder.
(c.) Når vil fisken nå 90% av dens asymptotisk lengde?

Løsning:
(a.) Vi ser at differensialligningen er seperabel, så:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k(L_\infty - L(t)) \implies \frac{\mathrm{d}L}{(L_\infty - L(t))} = k\,\mathrm{d}t$$

ved bruk av integrasjon

$$-\ln|L_\infty - L(t)| = kt + C' \implies \ln|L_\infty - L(t)| = -kt - C'$$
$$\implies |L_\infty - L(t)| = e^{-kt-C'} = e^{C'}e{-}kt \implies L_\infty - L(t) = Ce^{-kt}$$

ved bruk av initial verdi, har vi:

$$L_\infty - L(0) = Ce^{-k0} \implies L_\infty - 1 = C(1) \implies C = L_\infty - 1$$

Dette gir:

$$L_\infty - L(t) = (L_\infty - 1)e^{-kt} \implies L(t) = L_\infty - (L_\infty - 1)e^{-kt}$$
$$L(t) = L_\infty\Bigg(1 - \big(1 - \frac{1}{L_\infty}e^{-kt}\big)\Bigg)$$

Ift. von Bertalanffy ligning:

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = L_\infty \implies L_\infty = 123$$

For å finne k vet vi at fisken tar 27 måneder for å nå halv av dens asymtptotisk lengde. Derfor:

$$\begin{aligned}
L(27) = \frac{123}{2} &\implies 123\left[1 - \left(1 - \frac{1}{123}\right)e^{-27k}\right] = 61.5 \\
&\implies 1 - \left(\frac{1-123}{123}\right)e^{-27k} = \frac{61.5}{123} \\
&\implies -\frac{122}{123}e^{-27k} = \frac{615}{1230} - 1 \\
&\implies e^{-27k} = 0.5040 \implies \ln e^{-27k} = \ln(0.5040) \\
&\implies -27k = -0.6851 \implies k \approx 0.0254.
\end{aligned}$$

(b.)

$$\begin{aligned}
L(10) &= 123\Big[1 - \left(1 - \frac{1}{123}\right)e^{-(0.0254)(10)}\Big] \\
&= 123\Big[1 - \frac{122}{123}e^{-(0.254)}\Big] = 123 - 122e^{-(0.254)} \\
&= 123 - 94.6343 = 28.37 \text{ inches.}
\end{aligned}$$

(c.)

$$\begin{aligned}
123\left[1 - \left(1 - \frac{1}{123}\right)e^{-0.0254t}\right] &= \frac{90\cdot 123}{100} \\
&\implies 1 - \frac{122}{123}e^{-(0.0254t)} = \frac{9}{10} \\
&\implies e^{-(0.0254t)} = \frac{12.3}{122} \\
&\implies \ln e^{-(0.0254t)} = \ln\left|\frac{12.3}{122}\right| \\
&\implies -(0.0254t) = \ln\left|\frac{12.3}{122}\right| \\
&\implies 0.0254t = \ln\left|\frac{12.3}{122}\right|^{-1} \\
&\implies t = \frac{1}{0.0254}\ln\left|\frac{122}{12.3}\right| \approx 90.33 \text{ måneder.}
\end{aligned}$$

$\boxed{8.1.29}$ Bruk delbrøkoppspalting til å løse

$$\frac{dy}{dx} = 2y(3-y)$$

der $y(1) = 5$.

Løsning: Separasjon av variabler gir

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y(3-y)} = \int dx$$

og vi løser integralet til venstre ved delbrøkoppspalting:

$$\frac{1}{y(3-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{3-y}$$

og det følger at

$$1 = A(3-y) + By = 3A + (B-A)y.$$

Altså er $3A = 1$ og $B = A$, som gir $A = B = 1/3$. Det gir

$$\frac{1}{2}\int \frac{dy}{y(3-y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{3}\int \frac{dy}{3-y}\right) = \frac{\ln|y| - \ln|3-y|}{6} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{y}{3-y}\right|$$

(Det negative fortegnet foran $\ln|3-y|$ kommer fra substitusjonen $u = 3-y$ som gir $du = -dy$). Det gir

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{y}{3-y}\right| &= 6x + C \\
\left|\frac{y}{3-y}\right| &= e^C e^{6x} \\
\frac{y}{3-y} &= (\pm e^C)e^{6x} = ke^{6x}, \qquad k \neq 0 \\
y &= ke^{6x}(3-y) = 3ke^{6x} - yke^{6x} \\
y(1+ke^{6x}) &= 3ke^{6x} \\
y &= \frac{3ke^{6x}}{1+ke^{6x}} = \frac{3}{k^{-1}e^{-6x}+1}
\end{aligned}$$

For å bestemme verdien av konstanten k, er det enklest å gjøre bruk av ligningen

$$\frac{y}{3-y} = ke^{6x}$$

fra over. Dersom vi setter inn $y(1) = 5$ får vi

$$\frac{5}{3-5} = \frac{-5}{2} = ke^{6\cdot 1}$$

som gir

$$k = \frac{-5}{2e^6}$$

altså er

$$k^{-1} = -\frac{2}{5}e^6$$

og funksjonen kan skrives

$$y(x) = \frac{3}{1-\frac{2}{5}e^6e^{-6x}} = \frac{3}{1-\frac{2}{5}e^{-6(x-1)}}$$

$\square$

$\boxed{\text{8.1:34}}$ Løs differensialligning

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3-y)(2+y)$$

Løsning:
Ved bruk av separasjon av variabeler:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (3-y)(2+y) \implies \frac{\mathrm{d}y}{(3-y)(2+y)} = \mathrm{d}x$$

Nå bruker vi delbrøkoppspaltning på venstre side:

$$\begin{aligned} \text{Anta at: } \frac{1}{(3-y)(2+y)} &= \frac{A}{3-y} + \frac{B}{2+y} \\ &= \frac{A(2+y)+B(3-y)}{(3-y)(2+y)} \\ &\iff 2A + 3B = 1 \text{ og } A - B = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Dette gir } A = \frac{1}{5} \text{ også } B = \frac{1}{5}.$$

Derfor:

$$\frac{\mathrm{d}y}{(3-y)(2+y)} = \mathrm{d}x \implies \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3-y} + \frac{1}{2+y}\right]\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

Ved integrasjon:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3-y} + \frac{1}{2+y}\right]\mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\ &\implies \frac{1}{5}\big(-\ln|3-y| + \ln|2+y|\big) = x + C \\ &\implies \ln\left|\frac{2+y}{3-y}\right| = 5x + C \\ &\implies \frac{2+y}{3-y} = e^{5x+C} = e^{5x}\cdot e^{C} = C'e^{5x} \\ &\implies 2 + y = (3-y)C'e^{5x} = 3C'e^{5x} - yC'e^{5x} \\ &\implies y + yC'e^{5x} = 3C'e^{5x} - 2 \implies y(1 + C'e^{5x}) = 3C'e^{5x} - 2 \\ &\implies y = \frac{3C'e^{5x} - 2}{1 + C'e^{5x}} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{8.1:43}}$ (a.) Løs differensialligning

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}sp(1-p)$$

når

$$p(0) = p_0.$$

(b.) Anta at $p_0 = 0.1$ og $s = 0.01$; hvor lang vil det ta inntil $p(t) = 0.5$?
(c.) Finn $\lim_{t\to\infty} p(t)$. Forklar med ord hva dette betyr.

Løsning:
(a.)Ved bruk av separasjon av variabeler:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}sp(1-p) \implies \frac{\mathrm{d}p}{p(1-p)} = \frac{1}{2}s\,\mathrm{d}t$$

Nå bruker vi delbrøkoppspaltning på venstre side:

$$\begin{aligned}\text{Anta at: } \frac{1}{p(1-p)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{1-p} \\ &= \frac{A(1-p)+B(p)}{p(1-p)} \\ &\iff A = 1 \text{ og } B - A = 0.\end{aligned}$$

Dette gir $A = 1$ også $B = 1$.

Derfor:

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(1-p)} = \frac{1}{2}s\,\mathrm{d}t \implies \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right]\mathrm{d}p = \frac{1}{2}s\,\mathrm{d}t$$

Ved integrasjon:

$$\begin{aligned}\int \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p}\right]\mathrm{d}p &= \frac{1}{2}\int s\,\mathrm{d}t \\ &\implies \big(\ln|p| - \ln|1-p|\big) = \frac{1}{2}st + C \\ &\implies \ln\left|\frac{p}{1-p}\right| = \frac{1}{2}st + C \\ &\implies \frac{p}{1-p} = e^{\frac{1}{2}st+C} = e^{\frac{1}{2}st}\cdot e^{C} = C'e^{\frac{1}{2}st} \\ &\implies p = (1-p)C'e^{\frac{1}{2}st} = C'e^{\frac{1}{2}st} - pC'e^{\frac{1}{2}st} \\ &\implies p + pC'e^{\frac{1}{2}st} = C'e^{\frac{1}{2}st} \implies p(1 + C'e^{\frac{1}{2}st}) = C'e^{\frac{1}{2}st} \\ &\implies p = \frac{C'e^{\frac{1}{2}st}}{1 + C'e^{\frac{1}{2}st}} \\ &\implies p = \frac{C'e^{\frac{1}{2}st}}{C'e^{\frac{1}{2}st}\left(1 + \frac{1}{C'e^{\frac{1}{2}st}}\right)} \\ &\implies p = \frac{1}{1 + \frac{1}{C'e^{\frac{1}{2}st}}}\end{aligned}$$

Det er gitt at:

$$p(0) = p_0.$$

Derfor:

$$\begin{aligned}p_0 = \frac{C'e^{\frac{1}{2}s(0)}}{1 + C'e^{\frac{1}{2}s(0)}} &= \frac{C'}{1+C'} \\ &\implies p_0(1 + C') = C' \\ &\implies C' - p_0C' = p_0 \\ &\implies C' = \frac{p_0}{1-p_0}\end{aligned}$$

Ved bruk av verdien p, dette gir:

$$p = \frac{1}{1 + \frac{1}{C' e^{\frac{1}{2}st}}} \implies \frac{1}{1 + \frac{1-p_0}{p_0} e^{\frac{-st}{2}}}.$$

(b.)

$$\begin{aligned}
0.5 = \frac{1}{1 + \frac{1-0.1}{0.1} e^{\frac{-0.01t}{2}}} &\implies 0.5 = \frac{1}{1 + 9e^{\frac{-0.01t}{2}}} \\
&\implies 0.5(1 + 9e^{\frac{-0.01t}{2}}) = 1 \implies 4.5e^{\frac{-0.01t}{2}} = 0.5 \\
&\implies e^{\frac{-0.01t}{2}} = \frac{1}{9} \implies \frac{-0.01t}{2} = \ln\left|\frac{1}{9}\right| \\
&\implies t = -200 \cdot \ln\left|\frac{1}{9}\right| = 439.44
\end{aligned}$$

(c.)

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1-p_0}{p_0} e^{\frac{-st}{2}}} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

som betyr at bare befolkningen av typen A_1A_1 eventuelt vil overleve.

$\boxed{\text{8.1:53}}$ Hvis verdien av oxygen forbruk til ni arter av afrikanske pattedyr er tegnet mot deres BMI på en log-log plot, ligger alle punktene på en rett linje med skråningen lik nesten 0.8. Finn differensialligning som setter sammenhengen mellom verdien av oxygen forbruk og BMI.

Løsning:
Relasjon mellom oxygen forbruk (c) og BMI (m) på en log-log plot vil se ut som en rett linje, dvs:

$$\ln|c| \approx 0.8 \ln|m|$$

Ved differensiering på begge sider:

$$\frac{\mathrm{d}c}{c} \approx 0.8\frac{\mathrm{d}m}{m} \implies \frac{\mathrm{d}c}{c} = k\frac{\mathrm{d}m}{m} \implies \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}m} = k\frac{c}{m}.$$

$\boxed{\text{8.1:56}}$ (a.) Finn differensialligning for $N(t) = 1000e^t$ og $F(t) = 3t$, hvis $N(t)$ og $F(t)$ er vekstrate for befolkning og mat henholdsvis på tidspunkt t.
(b.) Hvilke antagelser trenger du for å sammenligne om når, hvis mulig, matforsyning vil være utilstrekkelig? Vil eksponentiell vekstrate ta over lineær vekstrate? Forklar.

Løsning:
(a.) Først tar vi:

$$N(t) = 1000e^t$$

Ved differensiering på begge sider:

$$\mathrm{d}N = 1000e^t\,\mathrm{d}t \implies \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 1000e^t \implies \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N(t) \implies \frac{\mathrm{d}N}{N} = \mathrm{d}t.$$

Også:

$$F(t) = 3t$$

Ved differensiering på begge sider:

$$\mathrm{d}F = 3\,\mathrm{d}t \implies \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = 3.$$

(b.) Ja, matforsyning vil være utilstrekkelig. Vi bør anta at endrinstakt for t. i.e. tid er samme for både $N(t)$ og $F(t)$. Det vil si $N(t) \geq F(t)$ fra $t \geq 0$.