10.5.3 Retning derivasjon og Gradient vektorer

Gradient vektoren $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$.

Retningsderivert av $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ på punktet (x_0, y_0) i retning til

vektoren $\mathbf{u}$ er gitt ved $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = (\nabla f(x_0, y_0)).\hat{\mathbf{u}},$ hvor $\hat{\mathbf{u}}$

er unit vektoren i retning til vektoren $\mathbf{u}$.

Hvorfor velge unit vektor?

10.5.3 Retning derivasjon og Gradient vektorer

Gradient vektoren $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$ peker alltid imot den bratteste retningen på et punkt (x_0, y_0) .

Det vil si at kurven $f(x,y)$ på punktet (x_0, y_0) øker raskest i retning til sin gradient.

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = (\nabla f(x_0, y_0)).\hat{\mathbf{u}} = \left|\nabla f(x_0, y_0)\right|\left|\hat{\mathbf{u}}\right| \cos\theta$$

(pga. scalar produktet) men $\hat{\mathbf{u}}$ er unit vektor med lengde 1.

$$\Rightarrow D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = \left|\nabla f(x_0, y_0)\right| \cos\theta, \text{ som er maks når } \theta = 0.$$

Hva vil stigningstallet være i den bratteste retningen?

10.6.1 Lokalt maksima og minima

For en variable funksjon:

$y = f(x)$, måtte vi finne kritiske punkter c_1, c_2, c_3, osv. først hvor $f'(x) = 0$

også hadde vi andre derivativ test:

hvis $f'(c_i) = 0$ og $f''(c_i) < 0 \Rightarrow f$ har lokalt maksimum på $x = c_i$;

hvis $f'(c_i) = 0$ og $f''(c_i) > 0 \Rightarrow f$ har lokalt minimum på $x = c_i, i = 1,2,3...$

Hvordan finner vi maks eller min for to variabelt funksjon $f(x,y)$?

Gradient av $f(x,y)$ og andre grads partielle deriverte hjelper oss med dette.

10.6.1 Lokalt maksima og minima

Først må vi finne kritiske punkter ved å sette grad.f = 0, i.e.,

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ eller hvis $\nabla f(x,y)$ på et gitt punkt (x_0,y_0) er null, da kan (x_0,y_0) være et kandidat for lokalt ekstremum.

Hvis $f(x,y)$, har kotinuerlig partielle deriverte på et punkt (x_0,y_0) og,

$$\nabla f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$ da definerer vi;

$$D = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2$$

1. Hvis $D > 0$ og $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, da f har lokalt minimum på (x_0,y_0).
2. Hvis $D > 0$ og $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, da f har lokalt maksimum på (x_0,y_0).
3. Hvis $D < 0$, da f har ingen lokalt ekstremum på (x_0,y_0) og punktet er sal punkt.