10.5.1 Kjerneregelen for å derivere to-variabelt funksjoner

Kjerneregel for en-variabelt funksjon:

Når $w = f(x)$, hvor x igjen er avhengig av t, slik at $x = g(t)$, da har vi kjerneregelen for å derivere w med hensyn til t : $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{dw}{dx}\dfrac{dx}{dt}$.

Men nå har vi $w = f(x,y)$, altså avhengig av både x og y,og både x og y er avhengig av t, i.e., $x = g(t)$ og $y = h(t)$. Hvordan kan vi derivere w med hensyn til t?

10.5.1 Kjerneregelen for å derivere to-variabelt funksjoner

Når $w = f(x,y)$, hvor x og y igjen er avhengig av t, slik at $x = g(t), y = h(t)$, da har vi kjerneregelen for å derivere w med hensyn til t : $\dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$, hvor både w, x og y skal være differensierbare med hensyn til t.

10.5.2 Implisitt derivasjon av to-variabelt funksjoner

Hvis y er gitt implisitt som et funksjon av x i en ligning slik at: $x^2y + y^4 - 2x - 4 = 0$, da vi kan finne $\frac{dy}{dx}$ ved bruk av implisitt derivasjon.

Det samme kan vi gjøre ved bruk av partielle deriverte:

Hvis $w = F(x,y)$, hvor $F(x,y)$ er differensierbar og $F(x,y) = 0$. I tillegg har vi $x = x$, men $y = h(x)$, da er y definert som implisitt funksjon av x. I praksis vil det bety at $w = w(x)$ er gitt lik 0, og vi kan bruke det for å finne $\frac{dy}{dx}$. Kan vi sammenligne den situasjon med det øverste?

10.5.2 Implisitt derivasjon av to-variabelt funksjoner

Når $w = F(x,y)$, med $F(x,y) = 0$. Om $x = x$ og $y = h(x)$ så i praksis har vi $w = w(x) = 0$, og y er definert implisitt som funksjon av x. Da kan vi finne $\dfrac{dy}{dx}$, ved bruk av partielle deriverte:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow 0 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

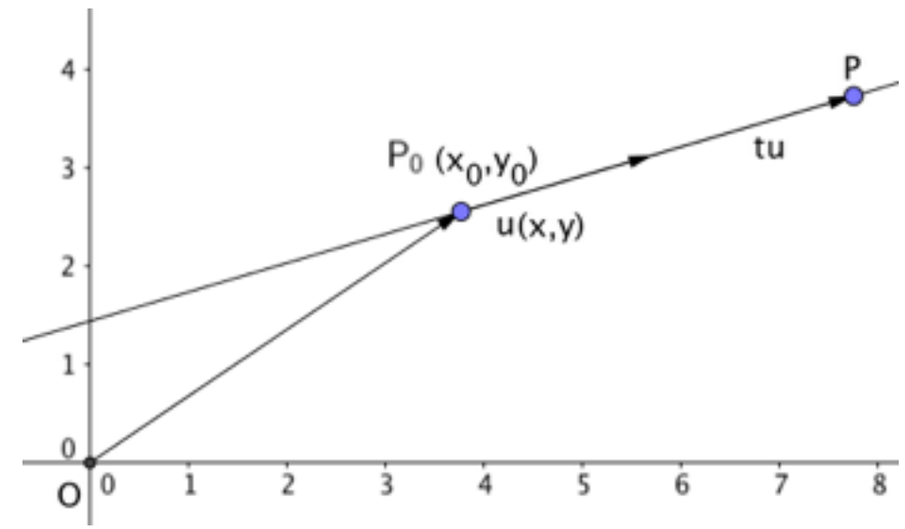
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial w}{\partial x}}{\dfrac{\partial w}{\partial x}} = \frac{-F_x}{F_y}, F_y \neq 0.$$

10.5.3 Retning derivasjon og Gradient vektorer

Parametrisk ligning av en linje i 2 dimensjoner kan finnes ved hjelp av ligning:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \text{ hvor } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}$ er unit vektor i retning til linje P_0P.



Vi får parametriske ligninger til linje som går gjennom punktet (x_0, y_0)

$$x = x_0 + tu_1$$
$$y = y_0 + tu_2$$

som gir oss:

$$\frac{dx}{dt} = u_1 \text{ og } \frac{dy}{dt} = u_2.$$

10.5.3 Retning derivasjon og Gradient vektorer

Da kan vi bruke kjerneregelen for å finne hvor mye $z = f(x,y)$, vil endre når vi velger å gå fra punket (x_0, y_0) i retning av linje P_0P.

$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$, hvor både z, x og y skal være differensierbare med hensyn til t og $\frac{dx}{dt} = u_1$ og $\frac{dy}{dt} = u_2$.

Derfor har vi:

$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og vektor $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$ kalles gradient av funksjon f.

10.5.3 Retning derivasjon og Gradient vektorer

Gradient vektoren $\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$ skrives som $\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$

og symbolet ∇ kalles for "del" og $\nabla f(x,y)$ kalles for "del av f " eller "grad av f ". Alternativt kalles ∇ som "nabla" også.

Retningsderivert av $z = f(x,y)$, på punktet (x_0, y_0) i retning til

vektoren $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ er gitt ved $D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0) = (\Delta f(x_0, y_0)).\hat{\mathbf{u}}$, hvor $\hat{\mathbf{u}}$

er unit vektoren i retning til vektoren $\mathbf{u}$.

Også $\Delta f(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right]\Bigg|_{(x=x_0, y=y_0)}$ på punktet (x_0, y_0).