MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Løsningsforslag — Øving 9

Oppgaver fra boken:

$$10.1 : 13, 14, \mathbf{18}$$

$$10.2 : 15, \mathbf{18}, \mathbf{32}$$

$$10.3 : 1, 6, 14, 18, \mathbf{24}, 33, \mathbf{42}$$

Det er oppgaven under og de oppgavene fra boken i **boldface** som skal leveres inn:

$\boxed{1}$ Vis ved hjelp av definisjonene av kontinuitet og grenseverdi at funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuerlig i origo. (Hint: $x^2 \leq x^2 + y^2$ for alle x og y.)

Løsning:
Vi må vise at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Nå er $f(0,0) = 0$, så vi må vise at når (x,y) er *nær* (men ikke i) origo, så er $f(x,y)$ *nær* 0. Mer presist: la $\epsilon > 0$. Vi må finne et positivt tall δ slik at når avstanden mellom (x,y) og $(0,0)$ er mindre enn δ (men ikke lik null), så er avstanden mellom $f(x,y)$ og 0 mindre enn ϵ. Nå er, for alle $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \frac{3x^2|y|}{x^2+y^2} \\ &\leq 3\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|y| \\ &= 3|y| \\ &\leq 3\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Med litt erfaring ser man at $\delta = \epsilon/3$ er tallet vi er ute etter. For hvis

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta,$$

så er

$$|f(x,y) - 0| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\delta = \epsilon$$

og $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ per definisjon.

$\boxed{\text{10.1:13}}$ Finn det største mulige domenet og den tilhørene verdimengden til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Finn også ligningene for nivåkurvene $f(x, y) = c$ og de mulige verdiene av c.

Løsning:
Funksjonen er definert for alle x og y, så domenet er

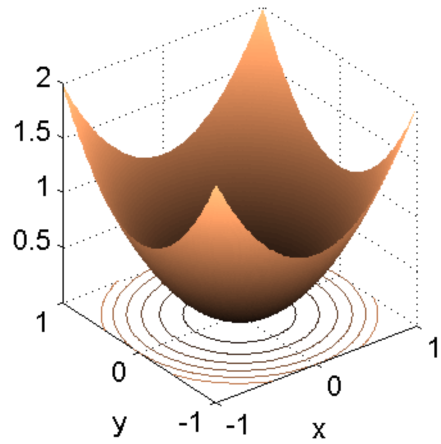
$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^2.$$

Verdimengden er åpenbart

$$\mathcal{V} = [0, \infty).$$

Nivåkurvene til f er sirkler med sentrum i origo og radius $\sqrt{c}$. Altså, $x^2 + y^2 = c$ der $c \in \mathcal{V}$.

Figur 1 viser grafen av f over kvadratet $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ og seks nivåkurver tilsvarene $c = i/5$, $i = 1, \ldots 6$.



Figur 1: Grafen av f og seks nivåkurver

$\boxed{\text{10.1:14}}$ Finn det største mulige domenet og den tilhørene verdimengden til funksjonen

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

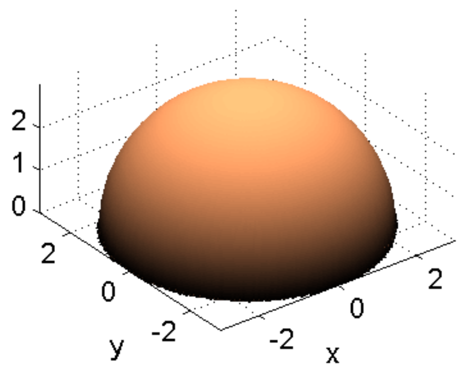
Finn også ligningene for nivåkurvene $f(x, y) = c$ og de mulige verdiene av c.

Løsning:
Funksjonen er definert for, og bare for, x og y slik at $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, så domenet er disken med sentrum i origo og radius 3:

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 9\right\}.$$

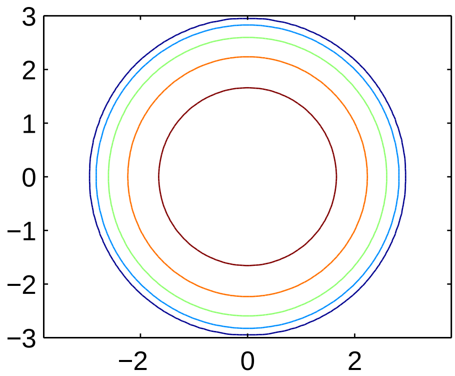
f er størst når $x^2 + y^2$ er minst mulig, dvs. $x^2 + y^2 = 0$. Og f er minst når $x^2 + y^2$ er størst mulig, dvs. $x^2 + y^2 = 9$. Altså er verdimengden

$$\mathcal{V} = [0, 3].$$



Figur 2: Grafen av f

Grafen av f (figur 2) er den øvre halvkulen med sentrum i origo og radius 3. Nivåkurvene til f er sirkler med sentrum i origo og radius $\sqrt{9 - c^2}$ der $c \in \mathcal{V}$. I figur 3 ser vi fem nivåkurver for f tilsvarene $c = i/2$, $i = 1, \ldots 5$.



Figur 3: Nivåkurver til f

$\boxed{10.1{:}18}$ Finn det største mulige domenet og den tilhørene verdimengden til funksjonen

$$f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}.$$

Finn også ligningene for nivåkurvene $f(x, y) = c$ og de mulige verdiene av c.

Løsning:
Funksjonen er definert for, og bare for, x og y slik at nevneren ikke er null. Dvs

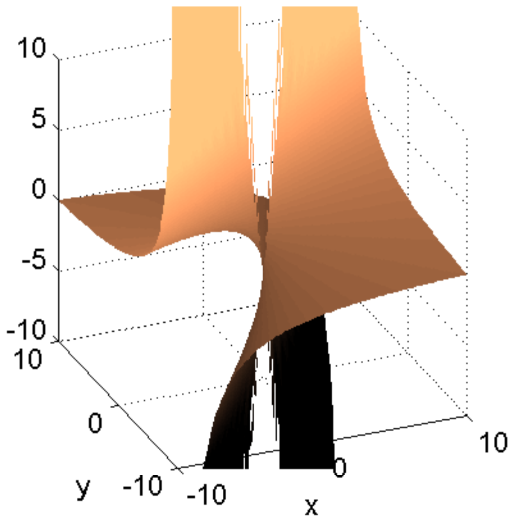
$$\mathcal{D} = \{(x, y) \,|\, y \neq x\}\,.$$

Verdimengden er

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}.$$

Bevis:
La $r \in \mathbb{R}$. Vi må finne et punkt $(x, y) \in \mathcal{D}$ slik at $f(x, y) = r$. La $x = r+1$ og $y = r-1$. Da er $(x, y) \in \mathcal{D}$ fordi $x \neq y$ og

$$f(r+1, r-1) = \frac{r+1+r-1}{r+1-(r-1)} = r. \qquad \square$$



Figur 4: Grafen av f

Ligningene for nivåkurvene er gitt ved

$$\frac{x+y}{x-y} = c.$$

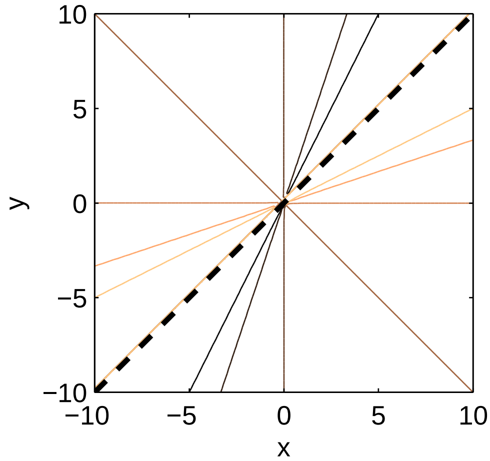
Vi forsøker å finne en ligning på eksplisitt form:

$$\frac{x+y}{x-y} = c \quad \iff \quad x + y = cx - cy \quad \iff \quad y(1+c) = x(c-1),$$

så nivåkurven for $c = -1$ er gitt ved $x = 0$ og for $c \neq -1$ er nivåkurvene gitt ved

$$y = \frac{c-1}{c+1}x.$$

Dvs. rette linjer gjennom origo. Figur 4 viser grafen av f på kvadratet $-10 \leq x, y \leq 10$ og figur 5 viser sju nivåkurver til f på $\mathcal{D}$ for $c = -3, \ldots, 3$.



Figur 5: Nivåkurver til f

$\boxed{10.2{:}15}$ La $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2}.$$

Vis at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

ikke eksisterer ved å beregne grensen i origo langs den positive x-aksen og langs den positive y-aksen.

Løsning:
På x-aksen er $y = 0$ og

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x,0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} 1 \\ &= 1,\end{aligned}$$

men på y-aksen er $x = 0$ og

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0^+} f(0,y) &= \lim_{y\to 0^+} \frac{-2y^2}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0^+} -2 \\ &= -2 \\ &\neq 1 = \lim_{x\to 0^+} f(x,0).\end{aligned}$$

Dvs. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ eksisterer ikke.

$\boxed{10.2{:}18}$ La f være gitt ved

$$f(x,y) = \frac{3xy}{x^2+y^3}.$$

Beregn grensen av $f(x,y)$ i origo langs de rette linjene $y = mx$ for $m \neq 0$. Hva kan du konkludere i forhold til eksistens av

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$$

Løsning:
La $m \neq 0$. På linjen $y = mx$ er funksjonsverdien gitt ved

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,mx) \\ &= \frac{3mx^2}{x^2+m^3x^3} \\ &= \frac{3m}{1+m^3x} \end{aligned}$$

når $x \neq 0$, så

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x,mx) &= \lim_{x\to 0} \frac{3m}{1+m^3x} \\ &= 3m \end{aligned}$$

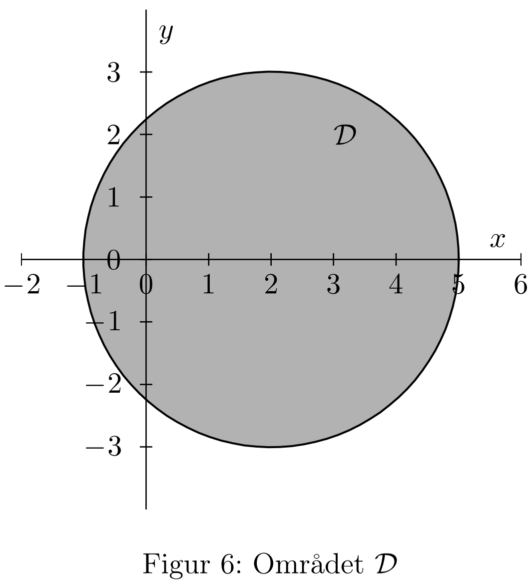
Altså avhenger grenseverdien, langs rette linjer inn mot origo, av retningen på linjene og grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ kan dermed ikke eksistere.

$\boxed{10.2{:}32}$ Tegn en lukket disk, $\mathcal{D}$, i x,y-planet med radius 3 og sentrum i (2,0) og gi en matematisk beskrivelse av denne mengden.

Løsning:
Et punkt (x,y) ligger i denne disken hvis og bare hvis avstanden mellom (x,y) og (2,0) er mindre eller lik 3. Dvs. hvis og bare hvis $\sqrt{(x-2)^2+y^2} \leq 3$. Mengden $\mathcal{D}$ kan altså beskrives som

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{(x-2)^2+y^2} \leq 3 \right\}.$$

Figur 6 viser området $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$.



Figur 6: Området $\mathcal{D}$

$\boxed{10.3{:}1}$ Finn funksjonene $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ når

$$f(x,y) = x^2y + xy^2.$$

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y^2.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2xy.$$

$\boxed{\textsf{10.3:6}}$ Finn funksjonene $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ når

$$f(x,y) = \tan(x - 2y).$$

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x-2y)}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2}{\cos^2(x-2y)}.$$

$\boxed{\textsf{10.3:14}}$ Finn funksjonene $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ når

$$f(x,y) = \ln(3x^2 - xy).$$

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{6x - y}{3x^2 - xy}.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{3x^2 - xy}.$$

$\boxed{\textsf{10.3:18}}$ Finn $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ når

$$f(x,y) = x^{1/3}y - xy^{1/3}.$$

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^{1/3} - \frac{1}{3}xy^{-2/3},$$

så

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1^{1/3} - \frac{1}{3}1 \cdot 1^{-2/3} = \frac{2}{3}.$$

$\boxed{\textsf{10.3:24}}$ Finn $\frac{\partial f}{\partial u}(2,1)$ når

$$f(u,v) = e^{u^2/2}\ln(u+v).$$

Løsning:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) &= ue^{u^2/2}\ln(u+v) + e^{u^2/2}\frac{1}{u+v}\\ &= e^{u^2/2}\left(u\ln(u+v) + \frac{1}{u+v}\right)\end{aligned}$$

så

$$\frac{\partial f}{\partial u}(2,1) = e^2\left(2\ln 3 + \frac{1}{3}\right).$$

$\boxed{10.3{:}33}$ Finn funksjonene $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ og $\frac{\partial f}{\partial z}$ når

$$f(x,y,z) = x^3y^2z + \frac{x}{yz}.$$

Løsning:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 3x^2y^2z + \frac{1}{yz},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2x^3yz - \frac{x}{y^2z},\\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y) &= x^3y^2 - \frac{x}{yz^2}.\end{aligned}$$

$\boxed{10.3{:}42}$ Finn funksjonen $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ når

$$f(x,y) = \sin(x-y).$$

Løsning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(x-y),$$

så

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\cos(x-y)\\ &= -\sin(x-y)\cdot(-1)\\ &= \sin(x-y).\end{aligned}$$