MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Løsningsforslag — Øving 8

Oppgaver fra boken:

$$9.4:10, \mathbf{14}, 18, \mathbf{26}, \mathbf{30}, 36, \mathbf{40}, 46, \mathbf{48}, 54, \mathbf{64}, \mathbf{66}.$$

Det er bare oppgaven i **boldface** som skal leveres inn.

9.4:10 Finn lengden av $\mathbf{x} = (-2, 1, -3)^T$.

Løsning:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{15}.$$

9.4:14 Normalisér vektoren $\mathbf{x} = (0, -3, 1, 3)^T$.

Løsning:
Å normalisere en vektor betyr å finne vektoren som peker i samme retning og har lengde en.

$$\mathbf{x} = (0, -3, 1, 3)^T, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{0 + 9 + 1 + 9} = \sqrt{19}.$$

Den normaliserte vektoren er derfor

$$\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{\sqrt{19}}(0, -3, 1, 3)^T.$$

9.4:18 Finn skalarproduktet av $\mathbf{x} = (2, -3, 1)^T$ og $\mathbf{y} = (3, 1, -2)^T$.

Løsning:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (2, -3, 1)(3, 1, -2)^T = 6 - 3 - 2 = 1.$$

9.4:26 Finn vinkelen mellom $\mathbf{x} = (1, -3, 2)$ og $\mathbf{y} = (3, 1, -4)$.

Løsning:
Vi har at

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} &= 3-3-8=-8\\ |\mathbf{x}| &= \sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}\\ |\mathbf{y}| &= \sqrt{9+1+16}=\sqrt{26},\end{aligned}$$

så

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|} = \frac{-8}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = -\frac{4}{\sqrt{91}}.$$

Dermed er vinkelen melom vektorene

$$\arccos\left(-\frac{4}{\sqrt{91}}\right) \approx 2.00,$$

eller $114.79°$.

$\boxed{\text{9.4:30}}$ La $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$. Finn $\mathbf{y}$ slik at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ står vinkelrett på hverandre.

Løsning:
Det er ingen unik løsning til dette problemet. Alle vektorer som ligger i planet gjennom origo med normalvektor $\mathbf{x}$, vil være vinkelrette til $\mathbf{x}$. $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ er vinkelrette hvis og bare hvis

$$0 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 2y_1 - y_3$$

som forventet er en standardligning for et plan i $\mathbb{R}^3$. Dette planet kan også skrives på parametrisk form, men vi trenger da to parametre s og t. La $y_3 = t$ og $y_2 = s$. For alle $s, t \in \mathbb{R}$ vil vektoren

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

være vinkelrett med $\mathbf{x}$.

$\boxed{\text{9.4:36}}$ Finn (standard)ligningen for linjen i $\mathbb{R}^2$ som går gjennom punktet $\mathbf{r}_0 = (3, 2)^T$ og har normalvektor $\mathbf{n} = (-1, 1)^T$.

Løsning:
Punktet $\mathbf{r} = (x, y)^T$ ligger på linjen hvis og bare hvis $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0$, så ligningen for linjen er gitt ved

$$\begin{aligned}0 &= \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\\ &= (-1, 1)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}\\ &= -(x-3)+y-2\\ &= -x+y+1.\end{aligned}$$

Ekstra:
Linjen kan parametriseres ved f.eks. å la $y = t$ være en fri variabel. Da må $x = t + 1$ så linjen er verdimengden av funksjonen $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{9.4:40}}$ Finn (standard)ligningen for planet i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom punktet $\mathbf{r}_0 = (1, 0, -3)^T$ og har normalvektor $\mathbf{n} = (1, -2, -1)^T$.

Løsning:
Punktet $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$ ligger i planet hvis og bare hvis $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, så ligningen for planet er gitt ved

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= (1, -2, -1) \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+3 \end{pmatrix} \\ &= x - 1 - 2y - (z+3) \\ &= x - 2y - z - 4. \end{aligned}$$

Ekstra:
Planet kan parametriseres ved f.eks. å la $z = t$ og $y = s$ være frie variabler. Da må $x = 2s + t + 4$ så planet er verdimengden av funksjonen $\mathbf{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$\mathbf{x}(s,t) = \begin{pmatrix} 2s+t+4 \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{9.4:46}}$ Finn en parametrisk beskrivelse av linjen i planet som går gjennom punktet $\mathbf{x}_0 = (-1, 4)^T$ i retning $\mathbf{u} = (2, 3)^T$.

Løsning:
En parametrisering av linjen er gitt ved

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(Linjen er verdimengden av funksjonen $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}$.)

$\boxed{\text{9.4:48}}$ Finn en parametrisk beskrivelse av linjen i planet som går gjennom punktet $\mathbf{x}_0 = (2, 1)^T$ og $\mathbf{x}_1 = (3, 5)^T$. Finn deretter standardligningen til linjen.

Løsning:
Retningen på linjen er $\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = (1,4)^T$ og en parametrisering av linjen er

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \\ &= \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

eller på komponentform

$$\begin{aligned}x(t) &= 2 + t \\ y(t) &= 1 + 4t.\end{aligned}$$

Vi kan nå eliminere t for å finne sammenhengen mellom x og y:

$$y - 4x = 1 + 4t - 8 - 4t = -7.$$

9.4:54 Finn en parametrisering av linjen $x - 5y + 7 = 0$.

Løsning:
Med $y = t$ er $x = -7 + 5t,\ y = t$ en parametrisering av linjen. På vektorform blir dette

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix}-7\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.$$

9.4:64 Finn ut hvor planet gjennom $\mathbf{r}_0 = (2,0,-1)^T$ med normalvektor $\mathbf{n} = (-1,1,3)^T$ møter linjen som går gjennom punktene $\mathbf{x}_0 = (1,0,-2)^T$ og $\mathbf{x}_1 = (-1,-1,1)^T$.

Løsning:
Et punkt $\mathbf{r} = (x,y,z)^T$ ligger i planet hvis og bare hvis

$$0 = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -x + y + 3z + 5.$$

Vi finner nå en parametrisering av linjen. La $\mathbf{u} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1 = (2,1,-3)^T$, så for alle $t \in \mathbb{R}$ ligger

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \\ &= \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

på linjen. På komponentform blir dette

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2t \\ y &= t \\ z &= -2 - 3t\end{aligned}$$

og hvis punktet på linjen også ligger i planet, så må

$$\begin{aligned} 0 &= -x + y + 3z + 5 \\ &= -(1+2t) + t + 3(-2-3t) + 5 \\ &= -10t - 2 \end{aligned}$$

dvs. $t = -\frac{1}{5}$. Skjæringspunktet mellom planet og linjen er altså

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\left(-\frac{1}{5}\right) &= \mathbf{x}_0 - \frac{1}{5}\cdot\mathbf{u} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{9.4:66}}$ Finn en linje på parametrisk form som står vinkelrett på planet $x+2y-z+1=0$.

Løsning:
Planet har normalvektor $\mathbf{n} = (1,2,-1)^T$ (det er bare å lese av koeffisientene i ligningen), så den parametriske linjen $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{n}$ står vinkelrett på planet for alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

Ekstra:
Hvis dét ikke synes innlysende, kommer her er et bevis for denne påstanden. La $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ være to punkter på linjen og la $\mathbf{y}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ og $\mathbf{y}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ være to punkter i planet. Vi må vise at

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) = 0.$$

Det finnes to tall a og b slik at $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(a)$ og $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(b)$. Dermed er

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(b) - \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_0 + b\mathbf{n} - \mathbf{x}_0 - a\mathbf{n} = (b-a)\mathbf{n}$$

uavhengig av $\mathbf{x}_0$ og

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\cdot(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) &= (b-a)\mathbf{n}\cdot(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) \\ &= (b-a)(1,2,-1)\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(x_2 - x_1 + 2(y_2 - y_1) - (z_2 - z_1)) \\ &= (b-a)(x_2 + 2y_2 - z_2 - (x_2 + 2y_2 - z_2)) \\ &= (b-a)(-1-(-1)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

F.eks. med $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ får vi linjen

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2t \\ z &= -t. \end{aligned}$$