# MA0002 Brukerkurs i matematikk B
# Vår 2016

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Løsningsforslag — Øving 7**

Anbefalte øvingsoppgaver fra boken:

$$9.3 : 53, 61, 64, 71, 75.$$

**Det er bare oppgaven under som skal leveres inn, ikke oppgavene fra boken.**

$\boxed{1}$ Leslie-matrisen (se side 459 i boka) for den årlige utviklingen av en populasjon er gitt ved

$$L = \begin{pmatrix} 1/4 & 5/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

der antall individer i de tre årsklassene ved $t = 0$ er

$$\mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Det endelige målet med denne oppgaven er å avgjøre om den samlede bestanden vil dø ut, konvergere mot et stabilt nivå eller vokse mot uendelig.

De følgende deloppgavene vil lede deg mot svaret:

**a)** Forklar betydningen av hvert av de positive elementene i $L$ og beregn $\mathbf{n}(1)$, dvs. finn ut hvor mange det er av hvert årstrinn om 1 år.

**b)** Vis at populasjonen etter $t$ år ($t$ heltall) er gitt ved $\mathbf{n}(t) = L^t\mathbf{n}(0)$.

**c)** Finn egenverdiene $\lambda_1, \lambda_2$ og $\lambda_3$ til $L$. (Hint: En av egenverdiene er et heltall)

**d)** Finn egenvektorene $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ til $L$ og skalér dem slik at alle komponentene er heltall.

**e)** La $a_1, a_2$ og $a_3$ være tre tall og la $t \in \mathbb{N}$. Vis at

$$L^t(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) = a_1\lambda_1^t\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2^t\mathbf{u}_2 + a_3\lambda_1^t\mathbf{u}_3.$$

**f)** Skriv $\mathbf{n}(0)$ som en **lineærkombinasjon** av egenvektorene til $L$. Dvs. finn 3 tall $a_1, a_2$ og $a_3$ slik at

$$\mathbf{n}(0) = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3.$$

**g)** Avgjør om bestanden vil dø ut, konvergere mot et stabilt nivå eller vokse mot uendelig. Dvs. finn

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{n}(t).$$

**Løsning: a)**
Populasjonen består av tre årskull: 0-åringer, 1-åringer og 2-åringer. Den første raden i $L$ forteller at hver 0-åring får i gjennomsnitt $1/4$ avkom per år, hver 1-åring får i gjennomsnitt $5/4$ avkom og hver 2-åring får i gjennomsnitt 1 avkom per år.

Tallene under diagonalen forteller at 50% av 0-åringene overlever til de er 1 år og at 25% av 1-åringene overlever til de er 2 år.

Om 1 år er fordelingen gitt ved

$$\mathbf{n}(1) = L\mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 1/4 & 5/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Altså, etter 1 år er det 150 0-åringer, 100 1-åringer og ingen 2-åringer.

**Løsning: b)**
Ettersom

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(1) &= L\mathbf{n}(0) \\ \mathbf{n}(2) &= L\mathbf{n}(1) = L(L\mathbf{n}(0)) = L^2\mathbf{n}(0) \end{aligned}$$

osv, så er

$$\mathbf{n}(t) = L\mathbf{n}(t-1) = LL^{t-1}\mathbf{n}(0) = L^t\mathbf{n}(0).$$

**Løsning: c)**
Egenverdiene til $L$ er løsningene av ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \det(L - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & 5/4 & 1 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/4 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} 1/2 & -\lambda \\ 0 & 1/4 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1/4-\lambda & 5/4 \\ 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}, \qquad \text{utvikler langs 3. kolonne} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \lambda\left( (\frac{1}{4}-\lambda)(-\lambda) - \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2} \right) \\ &= -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{5}{8}\lambda + \frac{1}{8} \\ &\Longleftrightarrow \\ 0 &= 8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda - 1 \end{aligned}$$

Hvis et heltall er en rot til et polynom med heltallskoeffisienter, så er roten en faktor av konstantleddet. Vi finner i dette tilfellet fort ut at $\lambda = 1$ er en løsning av ligningen.

Altså er $(\lambda - 1)$ en faktor i $8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda - 1$, og ved polynomdivisjon finner vi at

$$8\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda - 1 = (\lambda - 1)(8\lambda^2 + 6\lambda + 1).$$

Røttene i den andre faktoren er gitt ved andregradsformelen til å være -1/2 og -1/4. Dermed har vi funnet tre distinkte egenverdier:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{4}, \qquad \lambda_3 = 1.$$

**Løsning: d)**
Vi må finne $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ og $\mathbf{u}_3$ slik at

$$L\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Eller ekvivalent, $(L - \lambda_i I)\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$. Først finner vi $\mathbf{u}_1 = (u, v, w)^T$ som har tilhørende egenverdi $\lambda_1 = -1/2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \left(L + \frac{1}{2}I\right)\mathbf{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 3/4 & 5/4 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dette er et ligningssystem som kan løses ved standard radreduksjon, men vi kan være litt smarte og løse dette på en mer direkte måte. Fra rad 3, ser vi at $v/4 = -w/2$ eller $v = -2w$. Vi vet også at matrisen er singulær, så løsningen har minst én fri variabel. Hvis vi velger den frie variabelen til å være $w = t \in \mathbb{R}$, så har vi at $v = -2t$ og fra rad 2 får vi $u/2 = -v/2$. Dvs $u = -v = 2t$. Altså, for alle $t \in \mathbb{R}$, så er

$$\mathbf{u} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en løsning av ligningen og dermed en egenvektor av $L$. $t = 1$ gir en passende skalering, og vi har funnet den første egenvektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De to siste egenvektorene finner man med samme fremgangsmåte, og resultatet er

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Løsning: e)**
På samme måte som i **b)** ser vi at

$$\begin{aligned}L(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) &= a_1 L\mathbf{u}_1 + a_2 L\mathbf{u}_2 + a_3 L\mathbf{u}_3 \\ &= a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2 + a_3\lambda_1\mathbf{u}_3\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}L^2(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) &= L(a_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{u}_2 + a_3\lambda_1\mathbf{u}_3) \\ &= a_1\lambda_1 L\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2 L\mathbf{u}_2 + a_3\lambda_1 L\mathbf{u}_3 \\ &= a_1\lambda_1^2\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2^2\mathbf{u}_2 + a_3^2\lambda_1\mathbf{u}_3\end{aligned}$$

osv. Dvs

$$L^t(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + a_3\mathbf{u}_3) = a_1\lambda_1^t\mathbf{u}_1 + a_2\lambda_2^t\mathbf{u}_2 + a_3\lambda_1^t\mathbf{u}_3$$

for alle $t \in \mathbb{N}$.

**Løsning: f)**
La $U$ være 3x3-matrisen der kolonnene er egenvektorene til $L$:

$$U = (\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -2 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgaven kan nå formuleres som: Finn $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ slik at

$$U\mathbf{a} = \mathbf{n}(0).$$

(gang ut venstre side for å se at dette stemmer.) Ettersom $L$ har tre forskjellige egenverdier, så sier et teorem i boken at egenvektorene er **lineært uavhengig**. Dermed er $U$ inverterbar og det finnes da nøyaktig én $\mathbf{a}$ som løser ligningen. Ligningen løses enklest med vanlig radreduksjon, og løsningen er $\mathbf{a} = (0, 40, 20)^T$. Dvs.

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \mathbf{n}(0) = U\mathbf{a} = 40\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Løsning: g)**
Vi fant i oppgave **f)** at

$$\mathbf{n}(0) = 40\mathbf{u}_2 + 20\mathbf{u}_3$$

der $\mathbf{u}_2 = (1, -2, 2)^T$ og $\mathbf{u}_3 = (8, 4, 1)^T$ er egenvektorer til $L$ med tilhørende egenverdier henholdsvis $\lambda_2 = -1/4$ og $\lambda_3 = 1$.

Fra **b)** og **e)** har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(t) &= L^t\mathbf{n}(0) \\ &= L^t(40\mathbf{u}_2 + 20\mathbf{u}_3) \\ &= 40\lambda_2^t\mathbf{u}_2 + 20\lambda_3^t\mathbf{u}_3 \\ &= 40\left(-\frac{1}{4}\right)^t\mathbf{u}_2 + 20\cdot 1^t\mathbf{u}_3 \\ &= 40\frac{(-1)^t}{4^t}\mathbf{u}_2 + 20\mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty}\mathbf{n}(t) &= \lim_{t\to\infty}\left(40\frac{(-1)^t}{4^t}\mathbf{u}_2 + 20\mathbf{u}_3\right) \\ &= 0\mathbf{u}_2 + 20\mathbf{u}_3 \\ &= 20\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 160 \\ 80 \\ 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bestanden vil altså stabiliseres med en fordeling på 160 0-åringer, 80 1-åringer og 20 2-åringer.

**Merknader:**
Spørsmålet om stabilitet kunne ha blitt besvart allerede i oppgave **c)**. Det er egenvektoren med den tilhørende egenverdien med størst absoluttverdi som bestemmer utviklingen i det lange løp. Hvis denne verdien er større enn 1, vil bestanden vokse mot uendelig. Hvis den er mindre enn 1, vil bestanden dø ut. Eller, som i dette tilfellet, hvis verdien er 1, vil bestanden konvergere mot en fordeling proposjonal med egenvektoren. Merk også at startverdien, $\mathbf{n}(0)$, har ingen innvirkning på stabiliteten.

$\boxed{\text{9.3:53}}$ Finn egenvektorer og egenverdier til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Løsning:**
Den **karakteristske ligningen** er

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-4-\lambda)(1-\lambda) - 2(-3) \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2), \end{aligned}$$

så egenverdiene er

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = -2.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{v}_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &\iff \\ 0 &= -3u + 2v. \end{aligned}$$

La $v = t$. Da er $u = \frac{2}{3}t$ og for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til $A$. Med $t = 3$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= u \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &\iff \\ u &= v.\end{aligned}$$

Dvs. for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til $A$. Med $t = 1$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{9.3:61}}$ Finn egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

**Løsning:**
Egenverdiene er løsningene til ligningen

$$\begin{aligned}0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ 0 & b - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a - \lambda)(b - \lambda) - c \cdot 0 \\ &= (a - \lambda)(b - \lambda).\end{aligned}$$

Dvs.

$$\lambda_1 = a, \qquad \lambda_2 = b$$

som er elementene på diagonalen til $A$. Dette er fordi $A$ er **øvre triangulær**.

$\boxed{\text{9.3:64}}$ La

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avgjør om den reelle delen av begge egenverdiene er negativ uten å beregne dem.

**Løsning:**
Vi har bevist et teorem som sier at den reelle delen av egenverdiene til en 2x2-matrise er negative hvis og bare hvis $\operatorname{tr} A < 0$ og $\det A > 0$.

Vi beregner at $\operatorname{tr} A = -2 + 1 = -1 < 0$ og $\det A = -2 \cdot 1 - 3(-1) = 1 > 0$. Altså er den reelle delen av begge egenverdiene negativ.

$\boxed{\text{9.3:71}}$ La

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beregn

$$A^{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

uten å bruke kalkulator.

**Løsning:**
Vi ønsker å skrive $(2,0)^T$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$ til $A$. Ettersom $A$ er nedre triangulær, leser vi av egenverdiene til $A$ på diagonalen:

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 1.$$

Vi finner $\mathbf{u}_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A + I)\mathbf{u}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &\iff \\ 0 &= 3u + 2v. \end{aligned}$$

La $v = t$. Da er $u = -\frac{2}{3}t$ og for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til $A$. Med $t = -3$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Finner egenvektoren $\mathbf{u}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - I)\mathbf{u}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= u \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \\ u &= 0. \end{aligned}$$

Dvs. for alle $t \in \mathbb{R}$, er

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til $A$. Med $t = 1$ får vi egenvektoren

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ønsker nå å finne to tall $a_1$ og $a_2$ slik at

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser at $a_1$ må være 1 og det følger da at $0 = 1(-3) + a_2 \cdot 1$. Altså at $a_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Det følger nå at

$$\begin{aligned}
A^{15} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} &= A^{15}(\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2) \\
&= A^{15}\mathbf{u}_1 + 3A^{15}\mathbf{u}_2 \\
&= \lambda_1^{15}\mathbf{u}_1 + 3\lambda_2^{15}\mathbf{u}_2 \\
&= (-1)^{15}\mathbf{u}_1 + 3 \cdot 1^{15}\mathbf{u}_2 \\
&= -\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_2 \\
&= -\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{9.3:75}}$ Anta at

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

er en Leslie-matrise for en populasjon med to årsklasser.

**a)** Finn egenverdiene.

**b)** Gi en biologisk forklaring på den største egenverdien.

**c)** Finn den stabile aldersfordelingen. (med dette menes ikke at den totale bestanden nødvendigvis konvergerer, men at den prosentvise fordelingen av hver årsklasse i forhold til den totale bestanden konvergerer.)

**Løsning: a)**
Finner egenverdiene:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(L - \lambda I) \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0.3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)(-\lambda) - 1.2 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda - 1.2
\end{aligned}$$

som gir
$$\lambda = 1 \pm \sqrt{\frac{11}{5}}.$$
Dvs. $\lambda_1 = 1 + \sqrt{\frac{11}{5}}$ og $\lambda_2 = 1 - \sqrt{\frac{11}{5}}$.

**Løsning: b)**
Det er egenvektoren som korresponderer til den egenverdien med størst absoluttverdi som bestemmer utviklingen på sikt. $\lambda_1$ er grenseverdien av vekstraten når $t \to \infty$.

**Løsning: c)**
Vi finner $\mathbf{v}_1$.

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= (L - \lambda_1 I)\mathbf{v}_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{\frac{11}{5}} & 4 \\ 0.3 & -1 - \sqrt{\frac{11}{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &\iff \\ (1 - \sqrt{\frac{11}{5}})u &= -4v.\end{aligned}$$

Hvis vi lar $u = t$, så er
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{\frac{11}{5}} - 1}{4} \end{pmatrix}$$
en løsning av ligningssettet og dermed en egenvektor til $L$. Med $t = 4$ får vi egenvektoren
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{\frac{11}{5}} - 1 \end{pmatrix}.$$

For en startverdi skrevet som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{n}(0) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ (dette er mulig fordi egenverdiene er forskjellige og dermed er egenvektorene lineært uavhengige), har vi nå at de framtidige populasjonsnivåene er
$$\begin{aligned}\mathbf{n}(t) &= L^t\mathbf{n}(0) \\ &= L^t(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) \\ &= a_1L^t\mathbf{v}_1 + a_2L^t\mathbf{v}_2 \\ &= a_1\lambda_1^t\mathbf{v}_1 + a_2\lambda_2^t\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Vi ønsker nå å finne den stabile andelen av hver årsklasse i forhold til den totale størrelsen på bestanden. Vi skriver
$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ m(t) \end{pmatrix}$$
der $n(t)$ og $m(t)$ henholdsvis er antall 0-åringer og 1-åringer ved tiden $t$. La også
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\mathbf{n}(t) = \begin{pmatrix} n(t) \\ m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\lambda_1^t u_1 + a_2\lambda_2^t u_2 \\ a_1\lambda_1^t v_1 + a_2\lambda_2^t v_2 \end{pmatrix}.$$

Det totale antallet individer ved tiden $t$ er nå

$$\begin{aligned} n(t) + m(t) &= a_1\lambda_1^t u_1 + a_2\lambda_2^t u_2 + a_1\lambda_1^t v_1 + a_2\lambda_2^t v_2 \\ &= a_1\lambda_1^t(u_1 + v_1) + a_2\lambda_2^t(u_2 + v_2) \end{aligned}$$

og andelen av 0-åringer i forhold til antallet individer ved tiden $t$ er

$$\begin{aligned} \frac{n(t)}{n(t) + m(t)} &= \frac{a_1\lambda_1^t u_1 + a_2\lambda_2^t u_2}{a_1\lambda_1^t(u_1 + v_1) + a_2\lambda_2^t(u_2 + v_2)} \\ &= \frac{a_1 u_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t u_2}{a_1(u_1 + v_1) + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t (u_2 + v_2)} \end{aligned}$$

der vi i siste linje delte på $\lambda_1^t$ i teller og nevner.

Ettersom $|\lambda_1| = 1 + \sqrt{\frac{11}{5}} > \sqrt{\frac{11}{5}} - 1 = -\lambda_2 = |\lambda_2|$, vil

$$\lim_{t\to\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t = 0$$

og dermed vil andelen av 0-åringer i forhold til antallet individer nærme seg tallet

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{n(t)}{n(t) + m(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{a_1 u_1 + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t u_2}{a_1(u_1 + v_1) + a_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t (u_2 + v_2)} \\ &= \frac{u_1}{u_1 + v_1} \\ &= \frac{4}{4 + \sqrt{\frac{11}{5}} - 1} \approx 0.8922 \end{aligned}$$

forutsatt at $a_1 \neq 0$. På samme måte finner vi at andelen 1-åringer i forhold til antallet individer nærmer seg tallet

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{n(t) + m(t)} &= \lim_{t\to\infty} \left(1 - \frac{n(t)}{n(t) + m(t)}\right) \\ &\approx 1 - 0.8922 = 0.1078. \end{aligned}$$

Merk at vi ikke hadde behov for å vite $\mathbf{n}(0)$ for å komme frem til dette resultatet. Vi trengte også bare å beregne den ene egenvektoren; den som tilsvarte den største egenverdien.