Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{\text{9.2:66}}$ Bruk determinanten til å avgjøre om

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

er inverterbar. Beregn den inverse hvis den er inverterbar. I alle tilfeller løs ligningen

$$D\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Løsning:
D er ikke inverterbar fordi $\det D = (-3)8 - 6(-4) = 0$. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er åpenbart en løsning, men ettersom D er singulær finnes det også ikke-trivielle løsninger:

$$\begin{gathered} D\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Longleftrightarrow \\ -3x + 6y = 0 \\ -4x + 8y = 0 \\ \Longleftrightarrow \\ x - 2y = 0 \end{gathered}$$

fordi de to ligningene er ligninger for den samme linjen $x - 2y = 0$. Altså vil alle x, y slik at $x - 2y = 0$ være en løsning. Dette kan representeres på flere måter:

Løsningsmengde

$$\left\{ (x, y)' \;\middle|\; x = 2t,\ y = t,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eller som

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

$\boxed{\text{9.2:72}}$ Se oppgaveteksten i boka. Denne oppgaven krever mye regning. Det er lov å bruke verktøy som f.eks matlab eller maple hvis du føler du behersker matrisemultiplikasjon og du synes at utregningene blir kjedelige.

Løsning:
Den tillhørende Leslie-matrisen er

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

og startdistribusjonen av 0-åringer, 1-åringer og 2-åringer er gitt ved

$$\mathbf{n}(0) = \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Vi skal finne $\mathbf{n}(3)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(1) &= L\mathbf{n}(0) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 238 \\ 800 \\ 10 \end{pmatrix} \\
\mathbf{n}(2) &= L\mathbf{n}(1) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 238 \\ 800 \\ 10 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1319 \\ 190 \\ 80 \end{pmatrix} \\
\mathbf{n}(3) &= L\mathbf{n}(2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1.6 & 3.9 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1319 \\ 190 \\ 80 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 617 \\ 1055 \\ 19 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Svarene er rundet av til nærmeste heltall. Vi kunne også ha funnet $\mathbf{n}(3)$ ved først å beregne L^3 og deretter beregnet $\mathbf{n}(3) = L^3\mathbf{n}(0)$.

$\boxed{\text{9.3:2}}$ La

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

a) Vis ved en direkte utregning at $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$.

b) La $\alpha \in \mathbb{R}$. Vis ved en direkte utregning at $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x})$.

Løsning:
Vi har bevist at disse påstandene er riktige tidligere, men la oss gjøre utregningene:

a)

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(x_1+y_1) + b(x_2+y_2) \\ c(x_1+y_1) + d(x_2+y_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 + ay_1 + by_2 \\ cx_1 + dx_2 + cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{pmatrix} \\
&= A\mathbf{x} + A\mathbf{y}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
A(\alpha\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\alpha x_1 + b\alpha x_2 \\ c\alpha x_1 + d\alpha x_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(ax_1 + bx_2) \\ \alpha(cx_1 + dx_2) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \\
&= \alpha A\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Dette beviser at funksjonen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ er **lineær**.

$\boxed{\text{9.3:6}}$ Tegn vektoren $\mathbf{x} = (-1, -1)'$ i x, y-planet og finn vektorens polarkoordinater (Dvs. finn (r, θ) der r er vektorens lengde og θ er vinkelen vektoren danner med den positive x-aksen målt mot klokken.)

Løsning:

$$r = |\mathbf{x}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Vektoren ligger i 3. kvadrant, så vi må finne $\theta \in [\pi,\ 3\pi/2]$ slik at $\tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1$. Vi finner at $\theta = 5\pi/4$ gjør susen. Dvs $(r, \theta) = (\sqrt{2},\ 5\pi/4)$.

Kommentar:
Merk at $\arctan 1 = \pi/4 \neq 5\pi/4$. Dette er fordi arctan er definert som den inverse av tan med **domenet redusert til intervallet** $(-\pi/2,\ \pi/2)$. Altså vil vi alltid ha at $\arctan x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$.

Når vi nå ønsker å finne en θ utenfor dette intervallet, benytter vi oss av at tan er **periodisk** med periode π. Altså, for alle vinkler θ og alle heltall k, er

$$\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta.$$

Vi ønsker å løse den kombinerte ligningen og ulikheten

$$\tan\theta = 1, \qquad \pi < \theta < 3\pi/2.$$

Med $k = -1$ finner vi at

$$\tan(\theta - \pi) = \tan\theta = 1, \qquad 0 < \theta - \pi < \pi/2.$$

Altså er $\theta - \pi \in (-\pi/2,\ \pi/2)$, så når vi da tar den inverse på begge sider finner vi at

$$\theta - \pi = \arctan 1 = \pi/4.$$

Eller

$$\theta = \pi/4 + \pi = 5\pi/4.$$

$\boxed{9.3{:}8}$ Tegn vektoren $\mathbf{x} = (1, -\sqrt{3})'$ i x, y-planet og finn vektorens polarkoordinater (Dvs. finn (r, θ) der r er vektorens lengde og θ er vinkelen vektoren danner med den positive x-aksen målt mot klokken.)

Løsning:

$$r = |\mathbf{x}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2.$$

$\mathbf{x}$ ligger i 4. kvadrant (se kommentar over) så

$$\theta = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\pi/3.$$

$\boxed{9.3{:}12}$ Finn de kartesiske koordinatene $\mathbf{x} = (x, y)'$ til vektoren med polarkoordinater $(r, \theta) = (5, 240^\circ)$

Løsning:
For det første er

$$\theta = 240^\circ = 240\frac{\pi}{180} = 4\pi/3$$

målt i radianer, så

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos 4\pi/3 \\ 5\sin 4\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(-1/2) \\ 5(-\sqrt{3}/2) \end{pmatrix} = -\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{9.3{:}46}$ Bruk en rotasjonsmatrise for å rotere vektoren $\mathbf{x} = (1, -2)'$ $\pi/3$ radianer med klokken.

Løsning:
Vi vet at rotasjonsmatrisen

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vil rotere vektorer i $\mathbb{R}^2$ θ radianer *mot* klokken. Vi skal altså rotere $\mathbf{x}$ $-\pi/3$ *mot* klokken. Rotasjonsmatrisen blir da

$$\begin{aligned} R_{-\pi/3} &= \begin{pmatrix} \cos(-\pi/3) & -\sin(-\pi/3) \\ \sin(-\pi/3) & \cos(-\pi/3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Den andre likheten kommer av at cos er en **jevn** funksjon mens sin er en **odde** funksjon. Den roterte vektoren $\mathbf{y}$ er dermed gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= R_{-\pi/3}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$