$\boxed{9.2{:}43}$ Vis at den inverse av

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Løsning:
Ettersom

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

og

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

er B den inverse av A per definisjon.

$\boxed{2.9{:}49}$ Finn den inverse (hvis den eksisterer) av

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Løsning:
C har ingen invers fordi

$$\det C = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 3 = 0.$$

$\boxed{9.2{:}51}$ La

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Finn $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ ved

a) å løse det tilhørende lineære ligningssystemet,

b) å bruke den inverse til A.

Løsning: a)
Det tilhørende ligningssystemet er

$$\begin{aligned} -x &= -2 \\ 2x - 3y &= -5 \end{aligned}$$

med løsning $x = 2$ og $3y = 2x + 5 = 9$. Dvs.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Løsning: b)
Vi husker at den inverse av en 2x2-matrise $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er gitt ved $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Nå er $\det A = (-1)(-3) - 0 \cdot 2 = 3$ så

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

og løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ er gitt ved

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{d} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{9.2:58}}$ Anta at

$$A = \begin{pmatrix} a & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

a) Vis at når $a \neq 4$ så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nøyaktig én løsning.

b) Anta at $a = 4$. Finn betingelser på b_1 og b_2 slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har **(i)** uendelig mange løsninger og **(ii)** ingen løsninger.

c) Forklar resultatene i a) og b) grafisk.

Løsning: a)
Vi har at

$$\det A = 4a - 16 = 4(a - 4) = 0 \quad \iff \quad a = 4.$$

Så når $a \neq 4$, eksisterer A^{-1} og hvis $\mathbf{x}$ er en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så er $\mathbf{x}$ gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ som viser at løsningen er unik. At $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ faktisk **er** en løsning, ser vi av

$$A\mathbf{x} = AA^{-1}\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Løsning: b)
Anta $a = 4$. Vi reduserer den utvidede matrisen $(A\ \mathbf{b})$, og finner at

$$(A\ \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - \frac{1}{2}b_1 \end{pmatrix}$$

etter vi har trukket en halv førsterad fra andreraden. Oversatt til et ligningssystem, betyr dette at

$$4x + 8y = b_1 \quad \text{og at} \quad 0 = b_2 - \frac{1}{2}b_1.$$

Hvis det skal finnes en løsning, må $b_2 = \frac{1}{2}b_1$ og løsningsmengden kan da gis som

$$L = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x = \frac{b_1 - 8t}{4},\ y = t,\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Altså hvis $b_2 = \frac{1}{2}b_1$ har vi **uendelig mange løsninger** og hvis $b_2 \neq \frac{1}{2}b_1$ har vi **ingen løsninger**.

Løsning: c)
Vi skal studere ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, eller

$$\begin{aligned} ax + 8y &= b_1 \\ 2x + 4y &= b_2. \end{aligned}$$

Dette er to ligninger for to linjer i planet

$$y = -\frac{a}{8}x + \frac{b_1}{8} \quad \text{og} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{b_2}{4}.$$

Vi ser at disse to linjene vil ha samme stigningstall hvis og bare hvis $a = 4$ og vil da ikke ha noen felles punkter så fremt de ikke er samme linjen. Så hvis $a = 4$, representerer de to ligningene den samme linjen hvis og bare hvis $\frac{b_1}{8} = \frac{b_2}{4}$, dvs. $b_2 = \frac{1}{2}b_1$, og vi vil da ha uendelig mange løsninger. Hvis $a \neq 4$, vil de to linjene ha forskjellig stigningstall og dermed ikke være parallelle. De to linjene vil da ha ett, og kun ett felles punkt uansett hva b_1 og b_2 er.

$\boxed{5}$ La

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Finn det A og finn den inverse matrisen hvis det er mulig.

b) Løs ligningene

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

der

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{og der} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Løsning: a)

Vi *utvikler* determinanten langs første rad:

$$
\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -1\big((-2)(-1) - 3 \cdot 2\big) - 0 + 1\big((-1)2 - (-2)0\big) \\
&= -1(-4) - 2 = 2.
\end{aligned}
$$

og vi ser at A er inverterbar og vi finner den inverse av A vha. metoden beskrevet i 9.2.4:

$$
\begin{array}{c} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{array}
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.1}
$$

La

$$
\begin{aligned}
B_2 &= A_1 - B_1 \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= C_1 - B_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

og la $A_2 = -A_1$. Dette gir den ekvivalente matrisen

$$
\begin{array}{c} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

La deretter

$$
\begin{aligned}
B_3 &= \frac{1}{2}B_2 + C_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

og

$$
\begin{aligned}
A_3 &= A_2 + C_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dermed er matrisen (0.1) ekvivalent med

$$
\begin{array}{c} A_3 \\ B_3 \\ C_2 \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

og den inverse til A er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Løsning: b)
Ettersom A er inverterbar, er løsningene av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ og $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt henholdsvis som

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

og

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$