LF Øving ~~8~~ 4 MA0002

1 2
9.1: 1,2, 9, 10, 11
17, 25, 29

9.2: 1, 3, 15, 21
24, 25, 27, 28
38, 42

$\boxed{9.1:1}$

$$\begin{array}{ll} A & x - y = 1 \\ B & x - 2y = -2 \end{array}$$

Vi erstatter B med A − B:

$$x - y - (x - 2y) = 1 - (-2)$$
$$y = 3$$

og oppnår det ekvivalente ligningssystemet

$$\begin{array}{ll} A & x - y = 1 \\ A-B & \quad\;\; y = 3 \end{array}$$

så $x = 1 + y = 1 + 3 = 4$. Lösningen er altså

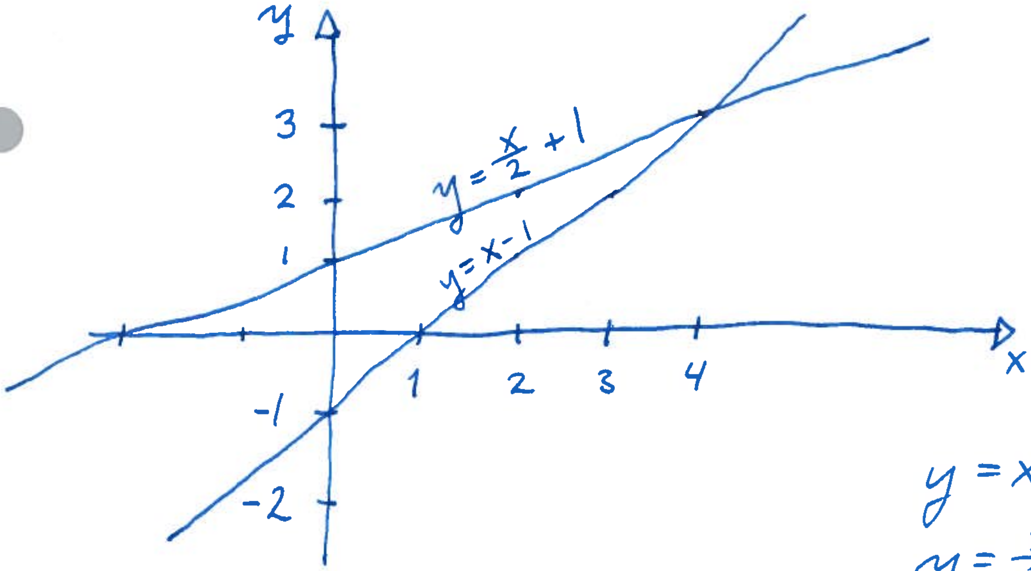
$$\underline{\underline{(x, y) = (4, 3)}}$$

__Grafisk lösning:__

A kan skrives som $y = x - 1$
B — " — $y = \frac{x}{2} + 1$

Linjen A har stigningstall 1 og skjærer y-aksen i −1
Linjen B har stigningstall $\frac{1}{2}$ og skjærer y-aksen i 1

②



Vi ser at det eneste punktet som ligger både på linjen $y = x - 1$ og linjen $y = \frac{x}{2} + 1$, er $(4,3)$

$\underline{9.1:2}$

$$\begin{array}{ll} A & 2x + 3y = 6 \\ B & x - 4y = -4 \end{array}$$

Vi erstatter B med $A - 2B$:

$$2x + 3y - 2(x - 4y) = 6 - 2(-4)$$

$$11y = 14,$$

så $y = \frac{14}{11}$ og

$$2x = 6 - 3y$$

$$= 6 - \frac{3 \cdot 14}{11} \Rightarrow$$

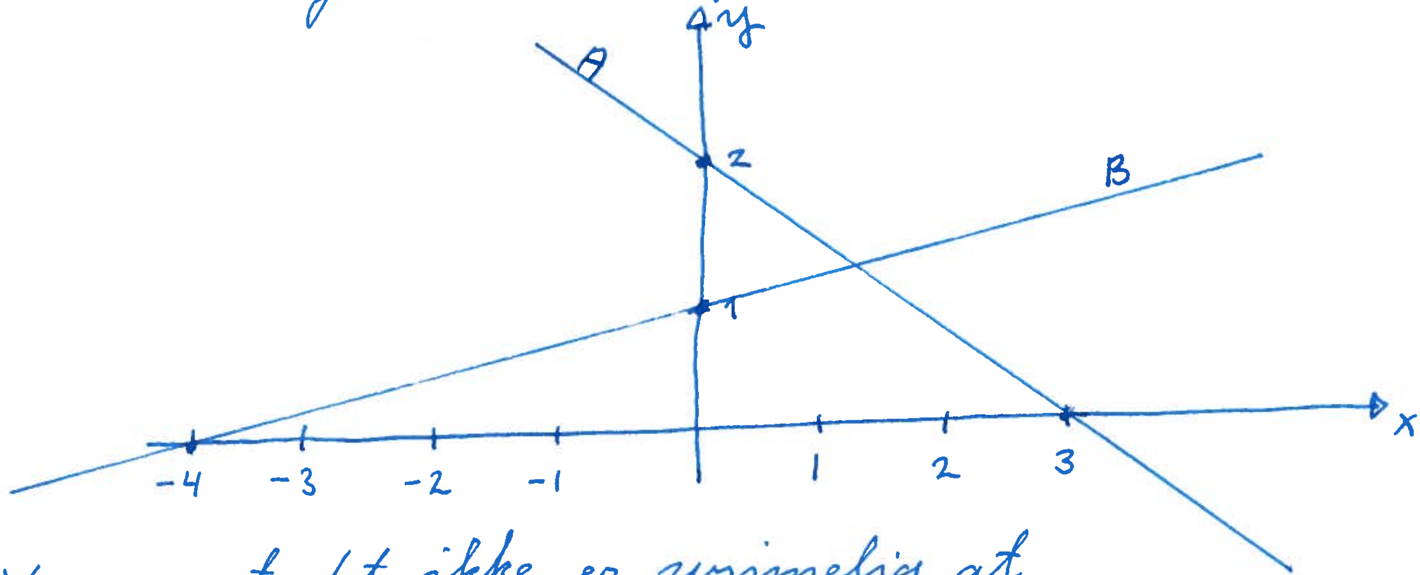
$$x = 3 - \frac{3 \cdot 7}{11} = \frac{33 - 21}{11} = \frac{12}{11}.$$

Løsningen er altså $\underline{\underline{(x,y) = \left(\frac{12}{11}, \frac{14}{11}\right)}}$

Grafisk lösning

A: $2x + 3y = 6$, $x = 0 \Leftrightarrow y = 2$, $y = 0 \Leftrightarrow x = 3$

B: $x - 4y = -4$, $x = 0 \Leftrightarrow y = 1$, $y = 0 \Leftrightarrow x = -4$



Vi ser at det ikke er urimelig at skjæringspunktet ligger i $(x,y) = \left(\frac{12}{11}, \frac{14}{11}\right)$

<u>9.1:9</u>

$$\begin{array}{ll} A & 2x - y = 3 \\ B & x - 3y = 7 \end{array}$$

Vi fjærner x fra linje B ved å erstatte B med $A - 2B$:

$$2x - y - 2(x - 3y) = 3 - 2 \cdot 7$$
$$5y = -11$$

Vi har nå et ekvivalent lignningsystem på övre triangulær form:

$$\begin{array}{ll} A & 2x - y = 3 \\ A-2B & 5y = -11 \end{array}$$

med lösning: $y = -\frac{11}{5}$

$$2x = 3 + y$$
$$= 3 - \frac{11}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ $(x, y) = \left(\frac{2}{5}, -\frac{11}{5}\right)$

$\boxed{9.1:10}$

$$\begin{array}{ll} A & 5x - 3y = 2 \\ B & 2x + 7y = 3 \end{array}$$

$B \longrightarrow 5B - 2A$:

$$\cancel{10x} + 35y - \cancel{10x} + 6y = 15 - 4$$
$$41y = 11$$

Övre triangulär form:

$$\begin{array}{lr} A & 5x - 3y = 2 \\ 5B - 2A & 41y = 11 \end{array}$$

med lösning $y = \frac{11}{41}$

$$5x = 2 + 3y$$
$$= 2 + \frac{33}{41} = \frac{115}{41} \Rightarrow x = \frac{23}{41}$$

$\therefore$ $(x, y) = \left(\frac{23}{41}, \frac{11}{41}\right)$

9.1:11

A $\quad 7x - y = 4$

B $\quad 3x + 2y = 1$

$B \longrightarrow 7B - 3A$:

$$\cancel{21x} + 14y - \cancel{21x} + 3y = 7 - 12$$

$$17y = -5$$

Øvre triangulær form:

A : $\quad 7x - y = 4$

7B - 3A : $\quad 17y = -5$

med løsning: $y = -\frac{5}{17}$

$$7x = 4 + y$$

$$= 4 - \frac{5}{17} = \frac{63}{17} \Rightarrow x = \frac{9}{17}$$

): $\quad (x, y) = \left(\frac{9}{17}, -\frac{5}{17}\right)$

$\boxed{9.1:17}$ Zach kjöper fisker og planter til akvariumet. Hver fisk koster \$2.30 og hver plante koster \$1.70. Han kjöper totalt 11 ting og betaler \$21.70. Hvor mange fisker og hvor mange planter kjöper han.

<u>Lösning</u>: La x være antall fisker og la y være antall planter. Vi har da at

$$\begin{array}{ll} A & x + y = 11 \\ B & 2.3x + 1.7y = 21.7 \end{array}$$

$B \rightarrow 2.3A - B$:

$$\cancel{2.3x} + 2.3y - \cancel{2.3x} - 1.7y = 25.3 - 21.7$$
$$0.6y = 3.6$$

Øvre triangulær form:

$$\begin{array}{ll} A & x + y = 11 \\ 2.3A - B & 0.6y = 3.6 \end{array}$$

med lösning $y = \frac{3.6}{0.6} = 6$ og

$$x = 11 - y = 11 - 6 = 5.$$

<u>Han kjöper 5 fisker og 6 planter</u>

$\boxed{9.1:25}$

$$\begin{aligned} -x - 2y + 3z &= -9 \\ 2x + y - z &= 5 \\ 4x - 3y + 5z &= -9 \end{aligned} \qquad (*)$$

Utvidet matrise:

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -3 & 5 & -9 \end{array}\right)$$

$B \longrightarrow B + 2A$:

$$(2 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 5) + (-2 \;\; -4 \;\; 6 \;\; -18)$$

$$= (0 \;\; -3 \;\; 5 \;\; -13)$$

$C \longrightarrow C - 2B$:

$$(4 \;\; -3 \;\; 5 \;\; -9) - (4 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 10)$$

$$= (0 \;\; -5 \;\; 7 \;\; -19).$$

Dette gir matrisen

$$\begin{array}{c} A \\ B+2A \\ C-2B \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 5 & -13 \\ 0 & -5 & 7 & -19 \end{array}\right) \begin{array}{c} A \\ B_1 \\ C_1 \end{array}$$

$C_1 \to 5B_1 - 3C_1$:

$$(0\ \cancel{4}\ -15 \quad 25 \quad -65) + ({}^{0}\,15 \quad -21 \quad 57)$$

$$= (0 \quad 0 \quad 4 \quad -8)$$

og vi har nå en matrise på övre triangulær form

$$(**)\quad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} A \\ B+2A \\ 5B_1-3C_1 = 5(B+2A)-3(C-2B) \\ \qquad\qquad = 10A + 11B - 3C \end{array}$$

Vi vet nå at $(*)$ er ekvivalent med ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x - 2y + 3z &= -9 \\ -3y + 5z &= -13 \\ 4z &= -8 \end{aligned}$$

som enkelt kan löses ved tilbake-substitusjon:

$$z = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\begin{aligned} -3y &= -13 - 5z \\ &= -13 + 10 = -3 \Rightarrow y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x &= -9 + 2y - 3z \\ &= -9 + 2 + 6 = -1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (x, y, z) = \underline{(1, 1, -2)}$$

Vi kunne også ha løst ligningssystemet ved å fortsette å gjøre elementære radoperasjoner på (**) til vi oppnår en matrise på formen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & -3 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A \\ B_1 \\ C_2 \end{array} \end{array}$$

Vi ønsker nå å lage nuller i feltene over 4 og -3:

$B_1 \longrightarrow 5C_2 - 4B_1$

$$(0 \quad 0 \quad 20 \quad -40) - (0 \quad -12 \quad 20 \quad -52)$$

$$= (0 \quad 12 \quad 0 \quad 12)$$

$A \longrightarrow 3C_2 - 4A$:

$$(0 \quad 0 \quad 12 \quad -24) + (4 \quad 8 \quad -12 \quad 36)$$

$$= (4 \quad 8 \quad 0 \quad 12)$$

Dette gir matrisen

$$\begin{array}{r} 3C_2-4A_1 \\ 5C_2-4B_1 \\ C_2 \end{array}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{array}{l} A_1 \\ B_2 \\ C_2 \end{array}$$

Vi må nå fjerne 8 i plass 1,2:

$A_1 \longrightarrow 3A_1 - 2B_2$:

$$(12 \;\; 24 \;\; 0 \;\; 36) + (0 \;\; -24 \;\; 0 \;\; -24)$$

$$= (12 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 12)$$

som gir

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}\begin{array}{l} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{array}$$

Vi ganger A_2 med $\frac{1}{12}$, B_2 med $\frac{1}{12}$ og C_2 med $\frac{1}{4}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi kan nå si at det opprinnelige lignings-systemet er ekvivalent med

$$\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 1 \\ y \qquad &= 1 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

som samsvarer med løsningen vi fant vha. tilbakesubstitusjon

9.1:29

$$\begin{array}{ll} A & x - 2y + z = 3 \\ B & 2x - 3y + z = 8 \end{array} \qquad (*)$$

Ligningssystemet er underdeterminert fordi det er færre ligninger en ukjente

$B \longrightarrow B - 2A$:

$$\cancel{2x} - 3y + z - \cancel{2x} + \cancel{4}y - 2z = 8 - 2 \cdot 3$$

$$y - z = 2$$

Vi lar $z = t$ være en fri variabel og finner at

$$y = 2 + z = 2 + t$$

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2y - z \\ &= 3 + 2(2+t) - t \\ &= 7 + t \end{aligned}$$

Løsningsmengden er dermed gitt som

$$L = \{(x, y, z) \mid x = 7 + t,\ y = 2 + t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}\}$$

Altså, for alle $t \in \mathbb{R}$ (alle reelle tall t)

så er

$$(x, y, z) = (7+t, 2+t, t)$$

en løsning av $(*)$.

Eller på vektor-form (vi skal lære mer om dette senere),

for alle $t \in \mathbb{R}$ så er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en løsning av $(*)$.

9.2:1

La $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Da er

$$A - B + 2C = \begin{pmatrix} -1-0+2\cdot 1 & 2-1+2(-2) \\ 0-2+2\cdot 1 & -3-4+2(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}}}$$

9.2:3 Finn D slik at $A+B = 2A-B+D$

Løsning: Matriser følger samme regneregler som tall når det gjelder addisjon så $D = A+B-(2A-B) = -A+2B$. Mer rigorøst, kan dette bevises som følgende:

$$A+B = 2A-B+D$$

$$\Leftrightarrow \quad A+B-(2A-B) = 2A-B+D-(2A-B) \qquad a)$$

$$\Leftrightarrow \quad A+B-2A+B = 2A-B+D-2A+B \qquad b)$$

$$\Leftrightarrow \quad A-2A+B+B = 2A-2A+B-B+D \qquad c)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1-2)A+(1+1)B = (2-2)A+(1-1)B+D \qquad d)$$

$\Leftrightarrow \quad -1A + 2B = 0A + 0B + D$ e)

$\Leftrightarrow \quad 2B - A = \overline{0} + \overline{0} + D = D$ f)

a) legger til matrisen $B-2A$ på begge sider

b) fordi $A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C$

c) fordi $A+B = B+A$

d) fordi $(a+b)A = aA + bA, \quad a,b \in \mathbb{R}$

f) fordi $\overline{0} + A = A$ og $0A = \overline{0}$ der $\overline{0}$ er nullmatrisen

Altså $D = -A + 2B$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}}}$$

9.2:15

Den transponerte av

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ er } A' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{9.2:21}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) $$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $$BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{9.2:24}$ Vis at $(AB)C = A(BC)$

Vi har at

$$(AB)C = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Vi regner først ut BC:

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

så
$$A(BC) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

og vi ser at $\underline{(AB)C = A(BC)}$

Dette er en lov som gjelder generelt og vi kan derfor skrive produktet som ABC (uten parenteser) uten at det kan missforstås.

<u>9.2:25</u> Vis at $(A+B)C = AC + BC$

Vi har at $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

så $(A+B)C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Videre er
$$AC = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

så $AC + BC = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

og vi ser at $\underline{(A+B)C = AC + BC}$.

Denne loven gjelder også generelt og er lett å huske fordi den er den samme som for tall

$\boxed{9.2:27}$ A 3×4-matrise

B $4\times\cancel{3}\,2$ matrise $\Rightarrow$ AB er en $3\times\cancel{3}\,2$-matrise

$3\times 4 \;\; 4\times 2$

9.2:38

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AI_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$I_3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$\boxed{9.2:42}$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 \quad x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

La $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da er $(*)$ ekvivalent med

$$\underline{\underline{A\bar{x} = \bar{b}}}$$