Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Løsningsforslag — Øving 3

Separable og førsteordens lineære differensialligninger

En differensialligning er **separabel** hvis den kan skrives på formen

$$y'(x) = f(y)g(x). \tag{0.1}$$

En differensialligning er **førsteordens lineær** hvis den kan skrives på formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x). \tag{0.2}$$

Strategi for å løse separable differensialligninger.

Ettersom $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(y)g(x)$, har vi formelt at $\frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$. Variablene er separert og integrering gir

$$F(y) := \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x =: G(x)$$

der $F(y)$ er en antiderivert til $\frac{1}{f(y)}$ og $G(x)$ er en antiderivert til $g(x)$. Invertér funksjonen F. Dvs. løs ligningen $F(y) = G(x)$ med hensyn på y. Dette vil gi den generelle løsningen til (0.1):

$$y(x) := F^{-1}(G(x)).$$

Strategi for å løse førsteordens lineære differensialligninger.

Gjør følgende:

1. Finn en antiderivert, $\mu(x)$, til $p(x)$.
2. Derivér uttrykket $y(x)e^{\mu(x)}$ med hensyn på x.

Dette vil gi

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)e^{\mu(x)}\right) &= y'e^{\mu} + ye^{\mu}\mu' \\
&= y'e^{\mu} + ye^{\mu}p \\
&= (y' + py)e^{\mu} \\
&= qe^{\mu}.
\end{aligned}$$

Altså er $y(x)e^{\mu(x)} = \int q(x)e^{\mu(x)}\,\mathrm{d}x$, eller

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int q(x)e^{\mu(x)}\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{1}$ Løs differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3$$

a) som en førsteordens lineær differensialligning.

b) som en separabel differensialligning.

c) Finn den unike løsningen til differensialligningen som har en graf som går igjennom punktet $(x, y) = (0, -1)$.

Løsning: a)
Vi ser at differensialligningen står på standardformen $y' + py = q$ der $p(x) = -2$ og $q(x) = 3$. Vi setter $\mu(x) = -2x$ slik at $\mu' = p$ og beregner

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(ye^{\mu}\right) &= \frac{d}{dx}\left(ye^{-2x}\right)\\ &= y'e^{-2x} + ye^{-2x}(-2)\\ &= (y' - 2y)e^{-2x}\\ &= 3e^{-2x}.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}ye^{-2x} &= \int 3e^{-2x}\,dx\\ &= -\frac{3}{2}e^{-2x} + C\end{aligned}$$

og vi deler med e^{-2x} på begge sider og finner at generell løsning er

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{3}{2}.$$

b)
Differensialligningen kan omskrives til

$$\frac{dy}{dx} = 3 + 2y,$$

så

$$\frac{dy}{3 + 2y} = dx.$$

Vi integrerer og finner at

$$\begin{aligned}
x + C_1 &= \int \frac{dy}{3+2y}, \qquad \text{SUB: } u = 3+2y,\ du = 2dy \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2}\ln|u| \\
&= \frac{1}{2}\ln|3+2y|. \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\ln|3+2y| = 2x + C_2, \quad \Rightarrow \quad |3+2y| = e^{2x+C_2}, \quad \Rightarrow \quad 3+2y = C_3e^{2x}$$

der $C_3 = \pm e^{C_2}$. Altså er

$$y(x) = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$$

som er den samme klassen av funksjoner som vi fant i oppgave **a)**.

c)
Vi skal altså løse initialverdiproblemet (IVP)

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3, \qquad y(0) = -1.$$

Generell løsning er $y(x) = Ce^{2x} - \frac{3}{2}$, så når $x = 0$ er

$$-1 = y(0) = Ce^{2\cdot 0} - \frac{3}{2} = C - \frac{3}{2}.$$

Dvs. $C = 1/2$ og løsningen blir da

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 3}{2}.$$

$\boxed{2}$ Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2xe^{-\sin x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

Løsning:
Dette er en førsteordens lineær differensialligning der $p(x) = \cos x$ og $q(x) = 2xe^{-\sin x}$. Vi setter $\mu(x) = \sin x$ og finner at

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(ye^{\sin x}\right) &= y'e^{\sin x} + ye^{\sin x}\cos x \\
&= (y' + y\cos x)e^{\sin x} \\
&= 2xe^{-\sin x}e^{\sin x} \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} ye^{\sin x} &= \int 2x\,dx \\ &= x^2 + C. \end{aligned}$$

INIT:

$$0 = y(\pi)e^{\sin \pi} = \pi^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -\pi^2$$

og vi har at løsningen er

$$y(x) = (x^2 - \pi^2)e^{-\sin x}.$$

$\boxed{3}$ Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{dN}{dt} + \frac{2N}{t} = \frac{1}{t^2}.$$

Løsning:
Igjen er ligningen førsteordens og lineær med $p(t) = 2/t$ og $q(t) = 1/t^2$. Vi setter $\mu(t) = 2\ln|t| = \ln t^2$ og finner at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(Ne^{\ln t^2}\right) &= \frac{d}{dt}(Nt^2) \\ &= N't^2 + N2t \\ &= \left(N' + \frac{2N}{t}\right)t^2 \\ &= \frac{1}{t^2}t^2 = 1. \end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned} Nt^2 &= \int dt \\ &= t + C \end{aligned}$$

og den generelle løsningen er dermed gitt ved

$$N(t) = \frac{1}{t} + \frac{C}{t^2}.$$

$\boxed{4}$ Finn en funksjon y slik at

$$xy'(x) = y(x) + x^3$$

og $y(-1) = 1/2$.

Løsning:
Initialbetingelsen er gitt ved $x = -1$ så hvis vi antar at $x < 0$, kan vi dele på x og skrive differensialligningen på standard form

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

der $p(x) = -1/x$ og $q(x) = x^2$. En antiderivert til p er

$$\begin{aligned}\mu(x) &= -\ln|x| \\ &= -\ln(-x), \qquad \text{fordi } x < 0 \\ &= \ln\left(-\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(ye^{\ln\left(-\frac{1}{x}\right)}\right) &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) \\ &= -\frac{y'x - y}{x^2} \\ &= -\left(y' - \frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} \\ &= -x^2\frac{1}{x} \\ &= -x.\end{aligned}$$

og

$$\frac{y}{x} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

INIT:

$$-\frac{1}{2} = \frac{y(-1)}{-1} = \frac{1}{2}1^2 + C \qquad \Rightarrow \qquad C = -1.$$

Dermed oppfyller funksjonen

$$y(x) = \frac{1}{2}x^3 - x$$

betingelsene i oppgaven.

Kapittel 8.2: Likevektspunkter og deres stabilitet

La oss si vi har en differensialligning på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \tag{0.3}$$

der g er en gitt funksjon. Hva kan man si om egenskapene til løsningene av (0.3) *uten* å løse differensialligningen? Det er klart at hvis g har et nullpunkt i $\hat{y}$, dvs. $g(\hat{y}) = 0$, så vil den konstante funksjonen

$$y(x) \equiv \hat{y} \tag{0.4}$$

være en løsning av (0.3) (begge sider i (0.3) er alltid lik null). Vi sier da at funksjonen (0.4) er en **likevektsløsning** av (0.3).

Det er også klart at grafen til en løsning av (0.3) vil stige hvis g er positiv og grafen vil synke hvis g er negativ.

En viktig egenskap til likevektsløsningene er deres **stabilitet**. Dette avgjøres ikke av likevektsløsningen selv, men av løsninger med en graf som starter nær $\hat{y}$: Anta at vi er gitt en initialbetingelse $y(x_0) = y_0$ der y_0 er et tall *nær* likevektspunktet $\hat{y}$. Vi sier at $\hat{y}$ er en **stabil** likevektsløsning hvis løsningen til initialverdiproblemet vil fortsette å nærme seg $\hat{y}$. Vi sier at $\hat{y}$ er en **ustabilt** likevektsløsning hvis løsningen fjerner seg fra $\hat{y}$.

Følgende teorem gjør det enkelt å kategorisere et likevektsløsninger.

Teorem 1. *En likevektsløsning $\hat{y}$ til differensialligningen* (0.3) *er stabilt hvis $g'(\hat{y}) < 0$. En likevektsløsning er ustabilt hvis $g'(\hat{y}) > 0$.*

$\boxed{\text{8.2:2}}$ Anta at

$$\frac{dy}{dx} = (4 - y)(5 - y).$$

a) Finn likevektsløsningene til denne differensialligningen.

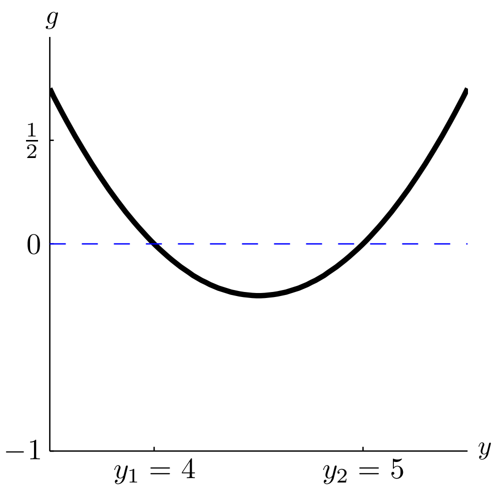
b) Tegn grafen til $\frac{dy}{dx}$ som en funksjon av y og bruk grafen til å drøfte stabiliteten til likevektsløsningene.

c) Beregn egenverdiene (se def. i boken) til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene.

Løsning: a)
Vi har at $\frac{dy}{dx} = g(y)$ der $g(y) = (4 - y)(5 - y)$. Vi finner likevektsløsningene der $g(y) = 0$, dvs. $y_1(x) \equiv 4$ og $y_2(x) \equiv 5$.

(Litt om notasjon: Vi skriver ofte $y(x) \equiv 4$ istedet for $y(x) = 4$ når vi ønsker å presisere at funksjonen y er definert til å være den konstante funksjonen $y(x) = 4$ for alle x. Uttrykket $y(x) = 4$ *kan* misforstås som en ligning i x. Jeg vil ikke være konsekvent med dette.)

b)
Som vi ser av figur 1, har g nullpunkter i $y_1 = 4$ og $y_2 = 5$. Hvis $y < 4$ så er g positiv og y



Figur 1: Grafen av g har to nullpunkter

stige og gå mot 4. Hvis $4 < y < 5$ så er g negativ og y vil synke og, igjen, gå mot 4. Altså, $y_1(x) = 4$ er en **stabil likevektsløsning**.

Hvis $y > 5$ så er g positiv og y vil stige å gå bort fra 5. Altså, $y_2(x) = 5$ er en **ustabil likevektsløsning**.

c)
Vi finner egenverdiene til likevektsløsningene: Vi har at $g(y) = (4-y)(5-y) = y^2 - 9y + 20$, så $g'(y) = 2y - 9$. Dette gir at

$$\lambda_1 = g'(y_1) = 2y_1 - 9 = -1 < 0$$

og

$$\lambda_2 = g'(y_2) = 2y_2 - 9 = 1 > 0$$

som bekrefter at $y_1(x) = 4$ er en **stabil likevektsløsning** og at $y_2(x) = 5$ er en **ustabil likevektsløsning**.

$\boxed{\text{8.2:6}}$ Anta at $N(t)$ er størrelsen av en populasjon ved tiden t. N tilfredsstiller differensialligningen

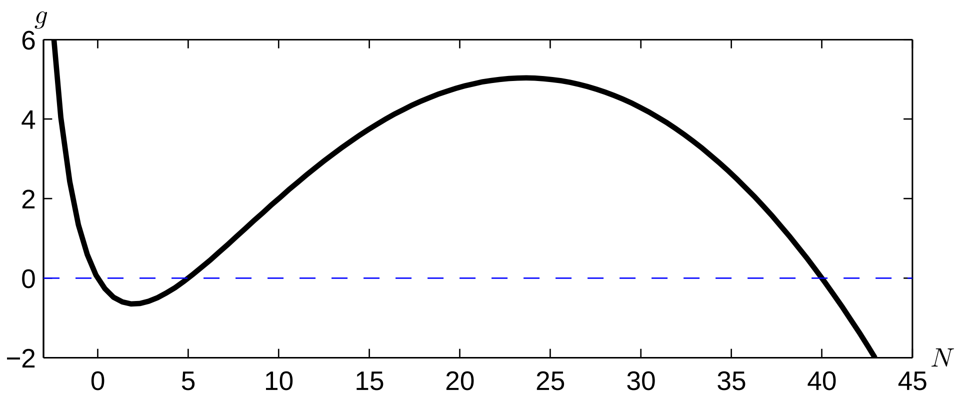
$$\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N} =: g(N). \tag{0.5}$$

a) Tegn grafen til g.

b) Finn likevektsløsningene til (0.5).

c) Bestem stabiliteten til likevektsløsningene.

Løsning:
a)
Vi tegner grafen vha. MATLAB:



Figur 2: Grafen til g

b)
Ifølge figur 2, ser det ut til at (0.5) har likevektsløsninger $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 5$ og $y_3(x) =$

40. Vi kan bekrefte det ved regning:

$$\begin{aligned}
g(N) &= N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5+N} \\
&= N\left(1 - \frac{N}{50} - \frac{9}{5+N}\right) \\
&= N\frac{50(5+N) - N(5+N) - 450}{50(5+N)} \\
&= -\frac{N(N^2 - 45N + 200)}{50(5+N)} \\
&= -\frac{N(N-5)(N-40)}{50(5+N)}
\end{aligned}$$

og dermed er

$$g(N) = 0 \qquad \iff \qquad N = 0,\ N = 5 \text{ eller } N = 40.$$

c)

Ifølge figur 2 og samme analyse som i oppgave 8.2:2 b), ser det ut til at y_1 og y_3 er stabile, mens y_2 er ustabil. Også dét kan bekreftes ved regning:

$$\begin{aligned}
g'(N) &= 1 - \frac{N}{25} - \frac{9(5+N) - 9N}{(5+N)^2} \\
&= 1 - \frac{N}{25} - \frac{45}{(5+N)^2}
\end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned}
g'(0) &= 1 - 45/5^2 \\
&= -4/5 < 0. \\
g'(5) &= 1 - 5/25 - 45/10^2 \\
&= 7/20 > 0. \\
g'(40) &= 1 - 40/25 - 45/45^2 \\
&= -28/45 < 0.
\end{aligned}$$