Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Øving 3

Separable og førsteordens lineære differensialligninger

En differensialligning er **separabel** hvis den kan skrives på formen

$$y'(x) = f(y)g(x). \tag{0.1}$$

En differensialligning er **førsteordens lineær** hvis den kan skrives på formen

$$y'(x) + p(x) = q(x). \tag{0.2}$$

Strategi for å løse separable differensialligninger.

Ettersom $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x) = f(y)g(x)$, har vi formelt at $\frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = g(x)\,\mathrm{d}x$. Variablene er separert og integrering gir

$$F(y) := \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} = \int g(x)\,\mathrm{d}x =: G(x)$$

der $F(y)$ er en antiderivert til $\frac{1}{f(y)}$ og $G(x)$ er en antiderivert til $g(x)$. Invertér funksjonen F. Dvs. løs ligningen $F(y) = G(x)$ med hensyn på y. Dette vil gi den generelle løsningen til (0.1):

$$y(x) := F^{-1}(G(x)).$$

Strategi for å løse førsteordens lineære differensialligninger.

Gjør følgende:

1. Finn en antiderivert, $\mu(x)$, til $p(x)$.
2. Derivér uttrykket $y(x)e^{\mu(x)}$ med hensyn på x.

Dette vil gi

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)e^{\mu(x)}\right) &= y'e^{\mu} + ye^{\mu}\mu' \\ &= y'e^{\mu} + ye^{\mu}p \\ &= (y' + py)e^{\mu} \\ &= qe^{\mu}.\end{aligned}$$

Altså er $y(x)e^{\mu(x)} = \int q(x)e^{\mu(x)}\,\mathrm{d}x$, eller

$$y(x) = e^{-\mu(x)} \int q(x)e^{\mu(x)}\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{1}$ Løs differensialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 3$$

a) som en førsteordens lineær differensialligning.

b) som en separabel differensialligning.

c) Finn den unike løsningen til differensialligningen som har en graf som går igjennom punktet $(x, y) = (0, -1)$.

$\boxed{2}$ Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2xe^{-\sin x}, \qquad y(\pi) = 0.$$

$\boxed{3}$ Finn den generelle løsningen til differensialligningen

$$\frac{dN}{dt} + \frac{2N}{t} = \frac{1}{t^2}.$$

$\boxed{4}$ Finn en funksjon y slik at

$$xy'(x) = y(x) + x^3$$

og $y(-1) = 1/2$.

Kapittel 8.2: Likevektspunkter og deres stabilitet

La oss si vi har en differensialligning på formen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(y) \tag{0.3}$$

der g er en gitt funksjon. Hva kan man si om egenskapene til løsningene av (0.3) *uten* å løse differensialligningen? Det er klart at hvis g har et nullpunkt i $\hat{y}$, dvs. $g(\hat{y}) = 0$, så vil den konstante funksjonen

$$y(x) \equiv \hat{y} \tag{0.4}$$

være en løsning av (0.3) (begge sider i (0.3) er alltid lik null). Vi sier da at funksjonen (0.4) er en **likevektsløsning** av (0.3).

Det er også klart at grafen til en løsning av (0.3) vil stige hvis g er positiv og grafen vil synke hvis g er negativ.

En viktig egenskap til likevektsløsningene er deres **stabilitet**. Dette avgjøres ikke av likevektsløsningen selv, men av løsninger med en graf som starter nær $\hat{y}$: Anta at vi er gitt en initialbetingelse $y(x_0) = y_0$ der y_0 er et tall *nær* likevektspunktet $\hat{y}$. Vi sier at $\hat{y}$ er en **stabil** likevektsløsning hvis løsningen til initialverdiproblemet vil fortsette å nærme seg $\hat{y}$. Vi sier at $\hat{y}$ er en **ustabilt** likevektsløsning hvis løsningen fjerner seg fra $\hat{y}$.

Følgende teorem gjør det enkelt å kategorisere et likevektsløsninger.

Teorem 1. *En likevektsløsning $\hat{y}$ til differensialligningen* (0.3) *er stabilt hvis $g'(\hat{y}) < 0$. En likevektsløsning er ustabilt hvis $g'(\hat{y}) > 0$.*

$\boxed{8.2:2}$ Anta at

$$\frac{dy}{dx} = (4 - y)(5 - y).$$

a) Finn likevektsløsningene til denne differensialligningen.

b) Tegn grafen til $\frac{dy}{dx}$ som en funksjon av y og bruk grafen til å drøfte stabiliteten til likevektsløsningene.

c) Beregn egenverdiene til hver likevektsløsning og avgjør stabiliteten til likevektsløsningene.

$\boxed{8.2:6}$ Anta at $N(t)$ er størrelsen av en populasjon ved tiden t. N tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{dN}{dt} = N\left(1 - \frac{N}{50}\right) - \frac{9N}{5 + N} =: g(N). \tag{0.5}$$

a) Tegn grafen til g.

b) Finn likevektsløsningene til (0.5).

c) Bestem stabiliteten til likevektsløsningene.