Kapittel 8.1: Differensialligninger

$\boxed{8.1{:}1}$ Løs initialverdiproblemet (IVP)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + \sin x, \qquad y(0) = 0.$$

Løsning:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x + \sin x \\ &\Rightarrow \\ \mathrm{d}y &= (x + \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \\ \int \mathrm{d}y &= \int (x + \sin x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \\ y &= \frac{1}{2}x^2 - \cos x + C. \end{aligned}$$

INIT: $0 = y(0) = 0 - 1 + C$. Dvs. C = 1 og løsningen er

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + 1.$$

$\boxed{8.1{:}10}$ Mengden fosfor i en innsjø ved tiden t er gitt ved en funksjon $P(t)$ som tilfredsstiller differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 3t + 1, \qquad P(0) = 0.$$

Finn mengden fosfor i innsjøen ved tiden $t = 10$.

Løsning:

$$P = \int (3t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}t^2 + t + C.$$

INIT: $0 = P(0) = 0 + 0 + C$. Så $C = 0$ og funksjonen P er gitt ved

$$P(t) = \frac{3}{2}t^2 + t.$$

Mengden fosfor i innsjøen ved tiden $t = 10$ er da

$$P(10) = \frac{3}{2}10^2 + 10 = 160.$$

$\boxed{\text{8.1:14}}$ Løs IVP

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - 3x, \qquad x(-1) = -2.$$

Løsning:
Differensialligningen er separabel. For $x \neq 1/3$ er $\frac{\mathrm{d}x}{1-3x} = \mathrm{d}t$. Dette gir

$$\begin{aligned} t + C &= \int \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1-3x}, \qquad \text{SUB: } u = 1-3x,\ \mathrm{d}u = -3\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= -\frac{1}{3}\ln|u| \\ &= -\frac{1}{3}\ln|1-3x|. \end{aligned}$$

Så $\ln|1-3x| = -3t + C'$ som gir $|1-3x| = e^{-3t+C'} = e^{C'}e^{-3t}$, eller

$$1 - 3x = Ke^{-3t}$$

der $K = \pm e^{C'}$.

INIT: $1 - 3(-2) = Ke^{-3(-1)}$. Dvs. $7 = Ke^3$ eller $K = 7e^{-3}$. Dette gir løsningen

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{3}\left(1 - Ke^{-3t}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - 7e^{-3}e^{-3t}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - 7e^{-3(t+1)}\right). \end{aligned}$$

Merk at $x(t) < 1/3$ for alle t.

$\boxed{\text{8.1:44}}$ Løs IVP

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

Løsning:
Ligningen er separabel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2\frac{y}{x} \\
&\Rightarrow \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\Rightarrow \\
\ln|y| &= 2\ln|x| + C \\
&= \ln|x|^2 + C = \ln x^2 + C
\end{aligned}
$$

Initialbetingelsen gir $0 = 0 + C$, så $\ln|y| = \ln x^2$ som er ekvivalent med $y = \pm x^2$. Ettersom $y = 1$ når $x = 1$, så må løsningen være

$$y(x) = x^2.$$