Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Løsningsforslag — Øving 1

Kapittel 7.1: Substitusjon

Teorem 1. *Hvis $u = g(x)$ så er*

$$\int f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Strategi for å evaluere et integral $\int F(x)\,\mathrm{d}x$ ved hjelp av substitusjon:

Forsøk å finne en funksjon, $g(x)$, (en substitusjon) slik at F kan skrives som $F(x) = f(g(x))g'(x)$. Altså som en (enkel) funksjon, f, av $g(x)$ ganger den deriverte $g'(x)$. Ved å sette $u = g(x)$ er da $\int F(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$ der høyre side ofte er enklere å integrere.

$\boxed{7.1:1}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int 2x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjonen $u = x^2 + 3$.

Løsning:
Vi ser at integranden $F(x)$ kan skrives som $f(g(x))g'(x)$ der f er kvadratrot-funksjonen og der $g(x) = x^2 + 3$ og $g'(x) = 2x$.

$$u = x^2 + 3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int 2x\sqrt{x^2+3}\,\mathrm{d}x &= \int u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3/2}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{3}(x^2+3)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

$\boxed{7.1:6}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int 5\sin(1-2x)\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjonen $u = 1 - 2x$.

Løsning:

$$u = 1 - 2x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = -2\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned}\int 5\sin(1-2x)\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int 5\sin u\,\mathrm{d}u \\ &= -\frac{5}{2}(-\cos u + C') \\ &= \frac{5}{2}\cos(1-2x) + C.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.1:33}}$ Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjon.

Løsning:
Vi ser at integranden inneholder faktoren $1/x$, som er den deriverte av $\ln x$. Vi forsøker derfor med substitusjonen

$$u = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x &= \int u^2\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.1:38}}$ La a og b være to konstanter. Beregn det ubestemte integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$$

ved hjelp av substitusjon.

Løsning:
Den naturlige substitusjonen

$$u = ax + b \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x$$

gir

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$$
$$= \frac{1}{a}(\ln|u| + C')$$
$$= \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

såfremt $a \neq 0$. Hvis $a = 0$ er $\int \frac{\mathrm{d}x}{b} = \frac{1}{b}\int \mathrm{d}x = \frac{x}{b} + C$, $b \neq 0$.

$\boxed{\text{7.1:50}}$ Beregn det bestemte integralet

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av substitusjon.

Løsning:
Vi ser at integranden inneholder faktoren $\cos x$, som er den deriverte av $\sin x$. Vi forsøker derfor med substitusjonen

$$u = \sin x \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x.$$

Vi har også at $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$ fordi integranden er en jevn funksjon. Nå vil $x = 0$ medføre at $u = 0$ og $x = \pi/6$ vil medføre at $u = 1/2$. Dermed er

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \cos x \,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^{1/2} u^2 \,\mathrm{d}u$$
$$= 2\Big|_0^{1/2} \frac{u^3}{3}$$
$$= \frac{2}{3}\left((1/2)^3 - 0\right)$$
$$= \frac{1}{12}.$$

Kapittel 7.2: Delvis integrasjon

Teorem 2.

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Altså hvis integranden er et produkt av to funksjoner der vi gjenkjenner den ene faktoren, $v'(x)$, som den deriverte av $v(x)$, kan vi ved delvis integrasjon "flytte" den deriverte over til den andre faktoren $u(x)$.

Håpet er at integralet på høyre side blir lettere å evalere enn integralet til venstre. En huskeregel kan være som følger:

$\int$ av $fg = f$ ganger "integralet av g" - $\int$ "deriverte av f" ganger "integralet av g".

$\boxed{7.2{:}1}$ Evaluér det ubestemte integralet

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x$$

ved delvis integrasjon.

Løsning:
Den deriverte av x er 1, så hvis vi flytter den deriverte fra $\cos x = (\sin x)'$ til den andre faktoren x, håper vi at det resulterende integralet blir lettere å løse:

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, \mathrm{d}x &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \\ &= x \sin x - (-\cos x + C') \\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Merk at ved å bytte rollene til x og $\cos x$, får vi også at

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \cos x - \int \frac{1}{2} x^2 (-\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

Dette resulterer bare i et integral som er *værre* å løse enn det opprinnelige.

$\boxed{7.2{:}6}$ Evaluér det ubestemte integralet

$$\int x \sin(1-2x) \, \mathrm{d}x$$

ved delvis integrasjon.

Løsning:
Integralet av $\sin(1-2x)$ er $\frac{1}{2}\cos(1-2x)$, så

$$\begin{aligned}\int x \sin(1-2x) \, \mathrm{d}x &= x \frac{1}{2} \cos(1-2x) - \frac{1}{2} \int \cos(1-2x) \, \mathrm{d}x \\ &= x \frac{1}{2} \cos(1-2x) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin(1-2x) \right) + C \\ &= \frac{1}{2} x \cos(1-2x) + \frac{1}{4} \sin(1-2x) + C.\end{aligned}$$

$\boxed{7.2{:}32}$ Evaluér det ubestemte integralet

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

ved delvis integrasjon.

Løsning:

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \int \sin x \sin x \, \mathrm{d}x \\
&= \sin x(-\cos x) - \int \cos x(-\cos x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + \int \mathrm{d}x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x \\
&= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Dermed er $2 \int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = -\sin x \cos x + x + C'$, eller

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C.$$

Merk:
Dette integralet kan også løses ved å bruke den trigonometriske identiteten

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Dette vil gi

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C
\end{aligned}$$

hvilket er samme svar fordi vi også har identiteten $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Kapittel 7.3: Rasjonale funksjoner og delbrøkoppspaltning

$\boxed{7.3{:}1}$ Bruk polynomdivisjon for å skrive

$$f(x) := \frac{2x^2 + 5x - 1}{x + 2}$$

som en sum av et polynom og en rasjonal funksjon $\frac{P}{Q}$ der $\deg P \leq \deg Q$.
($\deg P :=$ graden til polynomet P)

Løsning:

Polynomdivisjon:

$$
\begin{aligned}
2x^2 + 5x - 1 &: x + 2 = 2x + 1 - \frac{3}{x+2} \\
-(2x^2 + 4x)& \\
x - 1& \\
-(x + 2)& \\
-3.&
\end{aligned}
$$

Altså er

$$f(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x+2}.$$

$\boxed{7.3{:}5}$ Finn delbrøkoppspaltningen til

$$f(x) := \frac{2x-3}{x(x+1)}.$$

Løsning:
Vi forøker å finne konstanter A og B slik at $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x(x+1)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \\
&= \frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \\
&\iff \\
2x - 3 &= A(x+1) + Bx \\
&= (A+B)x + A \\
&\iff
\end{aligned}
$$

$A = -3$ og $A + B = 2$. Dvs. $B = 5$. Altså er

$$f(x) = \frac{2x-3}{x(x+1)} = -\frac{3}{x} + \frac{5}{x+1}.$$

$\boxed{7.3{:}11}$ Finn delbrøkoppspaltningen til

$$f(x) := \frac{4x+1}{x^2 - 3x - 10}.$$

Løsning:
Vi faktoriserer nevneren: $x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$ og forsøker å finne konstanter A

og B slik at $f(x) = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{4x+1}{x^2-3x-10} &= \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+2} \\
&= \frac{A(x+2)+B(x-5)}{(x-5)(x+2)} \\
&\iff \\
4x+1 &= A(x+2)+B(x-5) \\
&= (A+B)x + 2A - 5B \\
&\iff
\end{aligned}$$

$A + B = 4$ og $2A - 5B = 1$. Dette er et lineært ligningssett med to ukjente. Løsningen er $A = 3$ og $B = 1$. Dette gir

$$f(x) = \frac{4x+1}{x^2-3x-10} = \frac{3}{x-5} + \frac{1}{x+2}.$$

$\boxed{\text{7.3:20}}$ Evaluér integralet $I := \int f(x)\,\mathrm{d}x$ der

$$f(x) := \frac{x^3-3x^2+x-6}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

ved hjelp av delbrøkoppspaltning.

Løsning:
Integranden er en rasjonal funksjon der graden til telleren, 3, er mindre enn graden til nevneren, 4. Nevneren er også maksimalt faktorisert, så vi forsøker å finne fire konstanter A, B, C og D slik at

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

$$\begin{aligned}
\frac{x^3-3x^2+x-6}{(x^2+2)(x^2+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \\
&= \frac{(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+1)} \\
&\iff \\
x^3-3x^2+x-6 &= (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2) \\
&= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (A+2C)x + B + 2D \\
&\iff
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A + C &= 1 \\
B + D &= -3 \\
A + 2C &= 1 \\
B + 2D &= -6.
\end{aligned}$$

Dette er et lineært ligningssystem med fire ukjente som kan løses på vanlig måte. Vi observerer at systemet faktisk består av to uavhengige ligningssystem, hver med bare to ukjente, og er derfor lettere å løse:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = -3.$$

Dette gir

$$f(x) = \frac{x}{x^2+2} - \frac{3}{x^2+1}.$$

Vi har at $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C'$ og at

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}, \qquad \text{SUB: } u = x^2+2,\ \ \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C'\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C'.\end{aligned}$$

Dermed er

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{x^3-3x^2+x-6}{(x^2+2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - 3\arctan x + C.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{7.3:26}}$ Evaluér integralet

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$$

ved å fullføre kvadratet i nevneren.

Løsning:
Polynomet i nevneren kan ikke faktoriseres i lineære faktorer fordi diskriminanten

$$b^2 - 4ac = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16 < 0.$$

Fullfører kvadratet:

$$\begin{aligned}x^2+2x+5 &= (x+1)^2 - 1 + 5\\ &= (x+1)^2 + 4.\end{aligned}$$

Dette gir

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+4}\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\frac{(x+1)^2}{4}+1}, \qquad \text{må få nevneren på formen } u^2+1,\\ &= \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}, \qquad \text{SUB: } u = \frac{x+1}{2},\ \ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u,\\ &= \frac{2}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\ &= \frac{1}{2}\arctan u + C\\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.\end{aligned}$$