MA0002 Brukerkurs i matematikk B
Vår 2016

Øving 12

Oppgaver fra boken:

$$10.1 : \mathbf{4}, \mathbf{9}, \mathbf{25}, \mathbf{67}$$

11.1:4 Skriv systemet av differensialligninger på matrise-form.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2y - 3x - z$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + y$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 5x + z$$

11.1:9 Hver figur er retningsfeltet til nøyaktig ett av de følgende systemene. Finn hvilket retningsfelt som tilhører hvilket system.

a)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x + y$$

b)

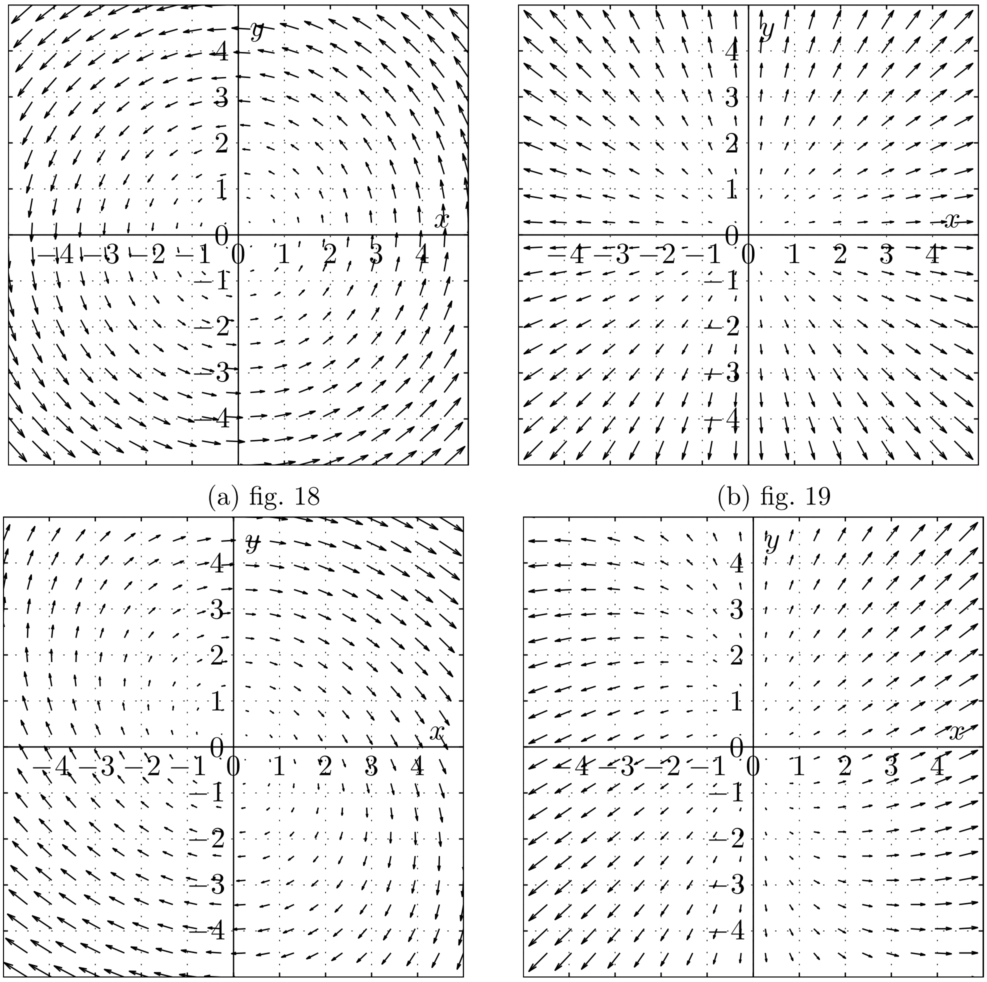
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x + 2y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2x$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y$$

d)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x$$



(a) fig. 18

(b) fig. 19

(c) fig. 20

(d) fig. 21

Figur 1: Retningsfelt til oppgave 11.1:9

11.1:25 Løs initsialverdiproblemet (IVP):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = (-1, -2)^T.$$

11.1:67 Det følgende systemet har to forskjellige egenverdier, men en egenverdi er 0.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene

b) Finn den generelle løsningen $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))^T$.

c) Tegn linjene tillhørende til egenvektorene i retningsfeltet til systemet. Finn $\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}x$ og konkludér at alle retningsvektorer er parallelle til linjen som tilhører egenvektoren med den tillhørende egenverdien som ikke er 0. Beskriv hvordan løsninger som starter i forskjellige punkt vil oppføre seg.

Figur 2

1 Fiskevekst – von Bertalanffy-likning Fisk vokser gjennom hele sitt liv. Når de blir eldre vokser de imidlertid proporsjonalt saktere. En bestemt fisk har lengde 2 cm ved tiden $t = 0$, og har vokst til 80 cm etter ett år. Den asymptotiske lengden til denne fiskearten er 156 cm. Vekstraten til lengden er proporsjonal med differansen mellom den asymptotiske lengden og den nåværende lengden til fisken.

Denne oppgaven handler om å finne et uttrykk for fiskens lengde som funksjon av tiden (i måneder).

a) Bruk den gitte informasjonen til å sette opp en differensiallikning som representerer forholdet mellom vekstraten (den deriverte) til fiskens lengde og dens nåværende lengde. Løs likningen.

b) Bestem fiskens lengde etter to år.

c) Bestem vekstraten til fisken når den er ett år (oppgi svaret med benevning). Hva betyr det måltallet du fikk (gi en praktisk tolkning)?

d) Tegn grafen til funksjonen du fant i (a) (potensielt ved hjelp av GeoGebra).

2 Temperaturreduksjon – Newtons avkjølingslov Denne oppgaven handler om å finne uttrykk for temperaturen i vannet i to ulike termokanner (Sarek og Eva Solo) som funksjoner av tiden (i timer) etter påfylling av kokende vann. Temperaturen i vannet i de to kannene ble målt i flere tidspunkter etter påfylling (se Tabell 1). Temperaturen i rommet der kannene var plassert var $24,2$ °C.

a) Bruk informasjonen som er gitt til å sette opp en differensiallikning som representerer forholdet mellom endringsraten til temperaturen og den nåværende temperaturen for de to termokannene. Løs likningen.

b) Tegn grafene til funksjonene fra (a) i samme koordinatsystem (potensielt ved hjelp av GeoGebra). Sammenlikn resultatene og kommenter.

c) Gi en vurdering av modellene du har funnet i forhold til dataene fra målingene.

Figur 3: Sarek ståltermos (til venstre) og Eva Solo kaffekanne

Tid etter påfylling (timer)	Temperatur i vannet Sarek (°C)	Temperatur i vannet Eva Solo (°C)
0	94,3	94,3
1	92,6	89,0
2	90,3	85,8
3	88,9	83,7
5	85,9	78,7
7	82,9	74,6
11	77,8	67,8
12	76,5	66,5
53	47,5	37,0
75	39,9	32,1
96	34,8	28,9
192	24,2	24,2

Tabell 1: Data for de to termokannene

Newtons avkjølingslov sier at dersom vi plasserer et objekt i et rom med konstant temperatur, så vil endringsraten til temperaturen i objektet være proporsjonal med differensen mellom temperaturen i objektet og temperaturen i rommet.