Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet Institutt for matematiske fag	MA0002 Brukerkurs i matematikk B Vår 2016 **Løsningsforslag — Øving 11**

Oppgaver fra boken:

$$10.6 : \mathbf{1}, 8, \mathbf{9}, \mathbf{12}, \mathbf{19}, 26, \mathbf{29}, \mathbf{33}, 34$$

Det er oppgavene i **boldface** som skal leveres inn.

Lokale ekstremalpunkter: La $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ være et domene i planet og la $f \colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ være en funksjon med kontinuerlige andrederiverte. Anta at $(a, b) \in \mathcal{D}$ er et kritisk punkt, dvs. $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$. Da er

- (a, b) et **lokalt minimum** hvis $\det Hf(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$,
- (a, b) et **lokalt maksimum** hvis $\det Hf(a, b) > 0$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$,
- (a, b) et **sadelpunkt** hvis $\det Hf(a, b) < 0$.

$\boxed{\text{10.6:1}}$ Finn og klassifisér alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x.$$

Løsning:
(x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla f(x, y) \\ &= (2x - 2, 2y) \\ &\iff \\ (x, y) &= (1, 0). \end{aligned}$$

Vi bruker Hesse-matrisen til å klassifisere dette kritiske punktet:

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

så

$$Hf(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

og ettersom

$$\det Hf(1,0) = 4 > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 2 > 0$$

er (1,0) et **lokalt minimum**.

Kommentar:
Hvis determinanten er positiv, spiller det ingen rolle om vi sjekker fortegnet til $\operatorname{tr} Hf$ eller fortegnet til $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Du kan forsøke å bevise følgende påstand selv: Anta $\det Hf > 0$. Da er

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{tr} Hf > 0.$$

$\boxed{\text{10.6:8}}$ Finn og klassifisér alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x,y) = yxe^{-y}$$

Løsning:
(x,y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \nabla f(x,y) \\
&= (ye^{-y}, xe^{-y} - xye^{-y}) \\
&= (ye^{-y}, x(1-y)e^{-y}) \\
&\Longleftrightarrow \\
(x,y) &= (0,0).
\end{aligned}$$

Vi bruker Hesse-matrisen til å klassifisere dette kritiske punktet:

$$\begin{aligned}
Hf(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (1-y)e^{-y} \\ (1-y)e^{-y} & x(y-2)e^{-y} \end{pmatrix} \\
&= e^{-y} \begin{pmatrix} 0 & 1-y \\ 1-y & x(y-2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

så

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

og ettersom

$$\det Hf(1,0) = -1 < 0$$

er (0,0) et **sadelpunkt**.

$\boxed{\text{10.6:9}}$ Finn og klassifisér alle kandidater til lokale ekstremalpunkter til funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x,y) = x \cos y.$$

Løsning:
(x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla f(x,y) \\ &= (\cos y, -x\sin y) \\ &\iff \\ y &= \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \ \text{ og } \ x = 0. \end{aligned}$$

Det er altså uendelig mange kritiske punkter, men alle ligger jevnt fordelt på y-aksen. Vi bruker Hesse-matrisen til å klassifisere disse kritiske punktene:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin y \\ -\sin y & -x\cos y \end{pmatrix}$$

så

$$Hf\left(0, \frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1} \\ (-1)^{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

og ettersom

$$\begin{aligned} \det Hf\left(0, \frac{\pi}{2} + n\pi\right) &= -(-1)^{n+1}(-1)^{n+1} \\ &= -(-1)^{2(n+1)} \\ &= -\left((-1)^2\right)^{n+1} \\ &= -1 < 0 \end{aligned}$$

er alle de kritiske punktene $\left(0, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$ **sadelpunkt**.

$\boxed{\text{10.6:12}}$ La a og b være to konstanter og la $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x,y) = ax^2 + by^2.$$

a) Vis at $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$.

b) Finn betingelsene på a og b slik at (0,0) er henholdsvis et lokalt minimum, maksimum og et sadelpunkt.

Løsning: a)

$$\nabla f(0,0) = \nabla f(x,y)\big|_{(x,y)=(0,0)} = (2ax, 2by)\big|_{(x,y)=(0,0)} = (0,0).$$

Løsning: b)
Hesse-matrisen til f er

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

så

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}.$$

Nå er

$$\det Hf(0,0) = 4ab, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2a,$$

så dermed kan vi konkludere at (0,0) er

- et lokalt minimum hvis og bare hvis a og b begge er positive,
- et lokalt maksimum hvis og bare hvis a og b begge er negative,
- et sadelpunkt hvis og bare hvis a og b har forskjellig fortegn.

$\boxed{\text{10.6:19}}$ Finn absolutt maksimum til funksjonen $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x,y) = 2xy - x^2y - xy^2$$

der domenet er trekanten

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2-x\}.$$

(tegn figur!)

Løsning:
Funksjonen er deriverbar (og dermed kontinuerlig) på et lukket og begrenset domene. Dermed finnes et absolutt maksimum, og det ligger enten i et kritisk punkt eller på randen. Vi finner først de kritiske punktene:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{0} = \nabla f(x,y) \\
&\quad = (2y - 2xy - y^2, 2x - x^2 - 2xy) \\
&\quad \Longleftrightarrow \\
&0 = 2y - 2xy - y^2 = y(2 - 2x - y), \quad \text{og} \\
&0 = 2x - x^2 - 2xy = x(2 - 2y - x) \\
&\quad \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
y = 0 & \text{eller} & y = 2 - 2x \\
 & \text{og} & \\
x = 0 & \text{eller} & x = 2 - 2y
\end{array}$$

Her er det fire forskjellige kombinasjoner av løsninger: $(x,y) = (0,0), (2,0), (0,2)$ eller $(2/3, 2/3)$. Alle ligger i domenet til f og er kandidater til maksima. Merk at de tre første punktene er hjørnene til trekanten.

Randen består av tre rette linjestykker. Vi må finne parametriseringer til hver av dem og deretter finne kandidater til maksima til f på linjene. På linjestykkene er verdien av f en funksjon av én variabel.

Linjestykket $0 \leq x \leq 2,\ y = 0$ kan parametriseres som

$$c_1 : [0,2] \to \mathcal{D}$$

gitt ved

$$c_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi må nå finne kandidater til maksima til funksjonen $g_1 : [0,2] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$\begin{aligned} g_1(t) &= f(x(t), y(t)) \\ &= 2x(t)y(t) - x^2(t)y(t) - x(t)y^2(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

fordi $y(t) \equiv 0$. Så f har altså verdi 0 langs hele denne linjen.

Linjestykket $x = 0,\ 0 \le y \le 2$ kan parametriseres som

$$c_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

for $t \in [0,2]$. Men igjen er

$$\begin{aligned} g_2(t) &= f(x(t), y(t)) \\ &= 2x(t)y(t) - x^2(t)y(t) - x(t)y^2(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

og f har verdi 0 langs hele denne linjen også.

Linjestykket mellom hjørnene (0,2) og (2,0), der $x + y = 2$, kan parametriseres som

$$c_3(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

for $t \in [0,2]$. På denne linjen er

$$\begin{aligned} g_3(t) &= f(x(t), y(t)) \\ &= 2x(t)y(t) - x^2(t)y(t) - x(t)y^2(t) \\ &= 2t(2-t) - t^2(2-t) - t(2-t)^2 \\ &= t(2(2-t) - t(2-t) - (2-t)^2) \\ &= t((1-1)t^2 + (-2-2+4)t + 4 - 4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Altså er $f = 0$ på hele randen. Nå er

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) &= 2\frac{2}{3}\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{8}{27} > 0 \end{aligned}$$

hvilket beviser at f har et absolutt maksimum i $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(f har absolutt minimum lik 0 i alle punktene på randen)

$\boxed{10.6{:}26}$ Anta $f(x, y)$ har et horisontalt tangentplan i (0,0). Kan du konkludere at f har et lokalt ekstremalpunkt i (0,0)?

Løsning:
Nei. Det kan være et sadelpunkt.

$\boxed{10.6{:}29}$ Finn det maksimale volumet en rektangulær boks med seks sider kan ha, når overfatearealet er $A = 48\ \text{m}^2$.

Løsning:
La x, y og z være dimensjonene til boksen. Volumet er da $V = xyz$ og overflatearealet er $A = 2(xy + xz + yz)$. (Tegn figur!).

Det er oppgitt at $A = 48$ så høyden på boksen, z, er en funksjon av x og y:

$$z(x, y) = \frac{A/2 - xy}{x + y} = \frac{24 - xy}{x + y}. \tag{1}$$

Dermed kan volumet, som vi skal maksimere, også uttrykkes som en funksjon av x og y.

$$V(x, y) = xyz(x, y) = xy\frac{24 - xy}{x + y}.$$

Før vi kan maksimere denne funksjonen, må vi vite hvilket domene den har. Alle sidene x, y og z må være ikke-negative, men, som vi ser fra (1), kan ikke x og y være 0 sammtidig. Altså må $x \geq 0$ og $y \geq 0$ og $(x, y) \neq (0, 0)$. Fra (1) ser vi at $xy \leq 24$. Tilsammen gir dette domenet

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \;\middle|\; x \geq 0,\ 0 \leq y \leq \frac{24}{x}\right\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Vi kan *ikke* konkludere at det finnes et absolutt maksimum ettersom dometet ikke er lukket og begrenset, men vi kan finne kritiske punkter og avgjøre om de er lokale maksimum. (x, y) er et kritisk punkt hvis og bare hvis

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \nabla V(x, y)\\ &= \left(yz(x, y) + xy\frac{\partial z}{\partial x}(x, y), xz(x, y) + xy\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right)\end{aligned}$$

nå er

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = -\frac{24 + y^2}{(x + y)^2}$$

og

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -\frac{24 + x^2}{(x + y)^2}$$

så vi må ha

$$y\frac{24 - xy}{x + y} = xy\frac{24 + y^2}{(x + y)^2}$$

og

$$x\frac{24 - xy}{x + y} = xy\frac{24 + x^2}{(x + y)^2}.$$

Dette er ekvivalent med

$$y(24-xy)(x+y) = xy(24+y^2)$$

og

$$x(24-xy)(x+y) = xy(24+x^2)$$

ettersom $x+y>0$. Vi forenkler videre:

$$\begin{aligned} 24y^2 - x^2y^2 &= 2xy^3 \\ 24x^2 - x^2y^2 &= 2x^3y \end{aligned}$$

Vi ser at hvis $y=0$, så medfører det at $x=0$ og omvendt. Dermed kan vi fastslå at $x>0$ og $y>0$.

$$\begin{aligned} 24 - x^2 &= 2xy \\ 24 - y^2 &= 2xy \\ &\Longleftrightarrow \\ x^2 &= y^2 \\ 24 &= 3x^2 \\ &\Longleftrightarrow \\ (x,y) &= (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

der vi hele tiden har brukt at $x,y>0$.

Hvis V har et maksimum, så må det altså ligge i $(x,y) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$. Vi kunne ha sjekket om dette er et lokalt maksimum ved å beregne Hesse-matrisen, men vi ville i såfall uansett ikke hatt redskaper til å kunne avgjøre om dette punktet er et *absolutt* maksimum.

Det maksimale volumet, hvis det eksisterer, er

$$V(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot z(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = \left(2\sqrt{2}\right)^3 = 16\sqrt{2}.$$

Kommentar:
Ikke overaskende, er det kuben som gir det største volumet. Dette kunne vært forutsett pga. **symmetrien** i funksjonene V og z, nemlig at for alle $(x,y)\in\mathcal{D}$ er

$$z(y,x) = \frac{24-yx}{y+x} = \frac{24-xy}{x+y} = z(x,y)$$

og

$$V(y,x) = yxz(y,x) = xyz(x,y) = V(x,y).$$

Så hvis punktet (x_0,y_0) er et absolutt maksimum, er også punktet (y_0,x_0) et absolutt maksimum fordi $V(x_0,y_0) = V(y_0,x_0)$.

Hvis det nå finnes kun ett absolutt maksimum, så må $(x_0,y_0) = (y_0,x_0)$, dvs $x_0 = y_0$ og vi trenger bare å lete etter det på den parametriserte linjen $c(t) = (t,t)^T$ for $t\in(0,2\sqrt{6})$. (når $x,y = 2\sqrt{6}$ er $y = 24/x$). På linjen c er volumet gitt som en funksjon av én variabel

$$\begin{aligned} g(t) &= V(t,t) \\ &= t^2\frac{24-t^2}{2t} \\ &= \frac{1}{2}\left(24t - t^3\right). \end{aligned}$$

Det kritiske punktet er gitt ved

$$0 = g'(t) = \frac{1}{2}\left(24 - 3t^2\right)$$

med løsning $t = \sqrt{\frac{24}{3}} = 2\sqrt{2}$. Altså,

hvis V har nøyaktig ett absolutt maksimum, så finnes det i $(x, y) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

10.6:33 Avstanden fra origo (0,0,0) til punktet (x, y, z) er $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Finn den minste avstanden mellom et punkt i planet

$$x + y + z = 1 \tag{2}$$

og origo. (*Hint*: Minimér **kvadratet** av avstanden.)

Løsning:
La punktet (x, y, z) ligge i planet gitt ved ligning (2). Kvadratet av avstanden mellomm dette punktet og origo er da

$$s = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ettersom punktet ligger i planet, er $z = 1 - x - y$. Dermed kan s utrykkes som en funksjon bare av x og y:

$$s(x, y) = x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2.$$

Vi finner de kritiske punktene til s:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \nabla s(x, y) \\
&= (2x - 2(1 - x - y), 2y - 2(1 - x - y)) \\
&\iff \\
x = y \quad \text{og} \quad x &= 1 - x - y
\end{aligned}$$

Dvs. $(x, y) = (1/3, 1/3)$. Domenet til s er $\mathbb{R}^2$ som ikke er lukket og begrenset, så vi kan ikke konkludere med at det finnes et absolutt minimum. Men hvis det finnes, så må det ligge i (1/3,1/3) og avstanden fra origo er da

$$\begin{aligned}
\sqrt{s(1/3, 1/3)} &= \sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (1 - 1/3 - 1/3)^2} \\
&= \sqrt{3(1/3)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

10.6:34 Gitt den symmetriske matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

der a, b og c er reelle tall. Vis at egenverdiene til A er reelle.

Løsning:
Egenverdiene til A er løsningene av ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} a-\lambda & c \\ c & b-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)(b-\lambda) - c^2 \\ &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2. \end{aligned}$$

Dvs.

$$\lambda = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab-c^2)}}{2}$$

som er reelle fordi

$$\begin{aligned} (a+b)^2 - 4(ab-c^2) &= a^2 + b^2 + 2ab - 4ab + 4c^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab + 4c^2 \\ &= (a-b)^2 + 4c^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$